TRAITEMENT DU SIGNAL

Notes de cours

Filière année spéciale
Département Mesures Physiques
IUT d'Orsay

- Année 99/2000-

Contents

1 Signal **6**
1.1 Classification des signaux . . . 6
1.1.1 Stationnarité . . . 7
1.1.2 Ergodicité . . . 7
1.2 Caractéristiques du signal déterministe . . . 8
1.3 Caractéristiques du signal aléatoire (exemple : bruit) . . . 9

2 Bruit **10**

3 Distributions **12**

4 Séries de Fourier **14**
4.1 Définition . . . 14
4.2 Ecriture complexe de la Série de Fourier . . . 15
4.3 Ecriture en module et argument . . . 16
4.4 Spectre de raies . . . 16
4.5 Propriétés de la série de Fourier . . . 17
4.5.1 Parité, Linéarité . . . 17
4.5.2 Translation . . . 17
4.5.3 Conservation de l'énergie (Bessel-Parseval) . . . 17
4.5.4 Dérivation, intégration . . . 17
4.5.5 Produit et convolution . . . 18
4.6 Exemples de développement . . . 18
4.6.1 signal carré . . . 18
4.6.2 signal triangulaire . . . 18
4.6.3 signal modulé en amplitude . . . 18
4.7 Taux de distorsion harmonique . . . 19

5 Transformée de Fourier **20**
5.1 Propriétés . . . 21
5.1.1 Conservation de l'énergie : Formule de Parseval-Pancherel . . . 21
5.1.2 Fonction périodique . . . 21
5.1.3 Fonction échantillonnée . . . 23
5.2 Représentation de la transformée de Fourier . . . 23
5.2.1 Représentation dans l'espace complexe . . . 23
5.2.2 Représentation dans en module et argument . . . 23
5.3 Résumé des propriétés de la Transformée de Fourier . . . 24
5.4 Relation entre la série et la transformée de Fourier . . . 24
5.5 Transformées de signaux typiques . . . 24
5.5.1 Impulsion rectangulaire . . . 24
5.5.2 Signal à décroissance exponentielle . . . 25
5.6 Tables de transformées . . . 26

6 Convolution **29**
6.1 Introduction . . . 29
6.2 Définition de l'intégrale de convolution . . . 30
6.3 Convolution graphique . . . 32

7 Filtrage linéaire **35**
7.0.1 Filtres en cascade . . . 35
7.0.2 Analyse "qualitative" du filtrage . . . 35
7.0.3 Fenêtrage . . . 36

8 Echantillonnage **40**
8.1 Principe de l'échantillonnage . . . 40
8.2 Approximation d'une fonction par une série d'impulsions (convolution) . . . 40
8.3 Transformé de Fourier d'une fonction échantillonnée . . . 40
8.4 Théorème de Shannon ou théorème de l'échantillonnage . . . 41
8.5 Sous-échantillonnage du signal . . . 41
8.5.1 Représentation temporelle du sous-échantillonnage . . . 42
8.5.2 Représentation fréquentielle du sous-échantillonnage : le repliement de spectre 42
8.6 Echantillonnage réel . . . 44
8.6.1 Echantillonneur bloqueur . . . 44
8.6.2 Echantillonneur moyenneur . . . 45
8.6.3 Autres paramètres de l'échantillonnage réel . . . 46
8.7 Conversion . . . 47
8.7.1 Quantification . . . 47
8.7.2 Loi de compression et codage . . . 47
8.8 Restitution du signal . . . 47
8.8.1 Interpolation idéale de Shannon . . . 47
8.8.2 Suréchantillonnage . . . 47

9 Corrélation **48**
9.1 Intercorrélation temporelle . . . 48
9.1.1 Définition de l'intercorrélation temporelle . . . 48
9.1.2 Comparaison entre convolution et corrélation . . . 50
9.1.3 Autocorrélation d'un signal . . . 51
9.1.4 Intercorrélation/ autocorrélation de signaux périodiques . . . 52
9.1.5 Détection d'un signal noyé dans le bruit . . . 53
9.1.6 Densité spectrale d'énergie . . . 54
9.1.7 Densité spectrale de puissance . . . 55
9.2 Intercorrélation statistique . . . 56

10 Modulation **57**
10.1 Transformation du signal . . . 57
10.2 Modulation ou transposition de fréquence . . . 58
10.3 Modulations linéaires : la modulation d'amplitude . . . 59

10.3.1 Modulation d'amplitude sans porteuse 59
10.3.2 Modulation d'amplitude avec porteuse 62
10.3.3 Table résumée des modulations d'amplitude 66
10.4 Modulation de fréquence 66
10.4.1 Cas général : signal quelconque 66
10.4.2 Modulation de fréquence avec signal modulant sinusoïdal 68
10.4.3 Avantages de la modulation de fréquence 70
10.5 Modulations discrètes 71
10.5.1 Modulations par impulsions codées 71
10.5.2 Modulations discrètes d'une porteuse sinusoïdale 72

11 Transformée de Laplace 74
11.1 Définition 74
11.2 Propriétés 75
11.3 Technique de calcul 77
11.4 Exemples 77
11.4.1 Réponse d'un filtre RC passe-bas à un échelon de tension 77
11.4.2 Réponse d'un filtre passe-bas à une impulsion rectangulaire 78
11.5 Table de transformées de Laplace 79

12 Transformée de Fourier discrète 80

13 Transformée en Z. Introduction au filtrage numérique 81
13.1 Transformée en Z 81
13.2 Dictionnaire des transformées en Z 81
13.3 Fonction de transfert d'un fitre numérique 82
13.4 Transformation bilinéaire 82

14 Formulaire de Math 84
14.1 Trigonométrie 84
14.2 Nombres complexes 84
14.3 Equations différentielles 84
14.4 Dérivation 84
14.5 Intégration 84
14.6 Développements limités 84
14.7 Convergence des séries 85
14.8 Décomposition des fractions rationnelles 85
14.9 Probabilités 86

15 Bibliographie 87

Everything worth doing is worth doing twice :
the first time quick and dirty and the second,
the best way you can.

Ces notes de cours en traitement de signal ont été rédigées pour les élèves de l'Année Spéciale 1999-2000 de mars à juin 2000.

Elles veulent servir à poser et à présenter les principes essentiels du traitement du signal analogique. Basées sur la bibliographie citée en fin de document, elles cherchent à en reprendre les exemples les plus explicites. Certains paragraphes ne sont pas complets; c'est le cas pour les principes de quantification et de restitution du signal (chapitre sur l'échantillonnage) ainsi que pour les chapitres sur la transformée de Fourier discrète (DFT) et sur le filtrage numérique. Comme il s'agit d'une toute première version rapidement rédigée, ces notes peuvent comporter encore de nombreuses imperfections, erreurs et lacunes. Il est donc vivement conseillé de consulter certains des ouvrages indiqués dans la bibliographie et en particulier ceux repérés par un astérisque.

Toutes les remarques concernant ces notes seront les bienvenues et peuvent être adressées à : *patrice.brault@ief.u-psud.fr (IEF bat 220 Université Paris-sud Orsay).*

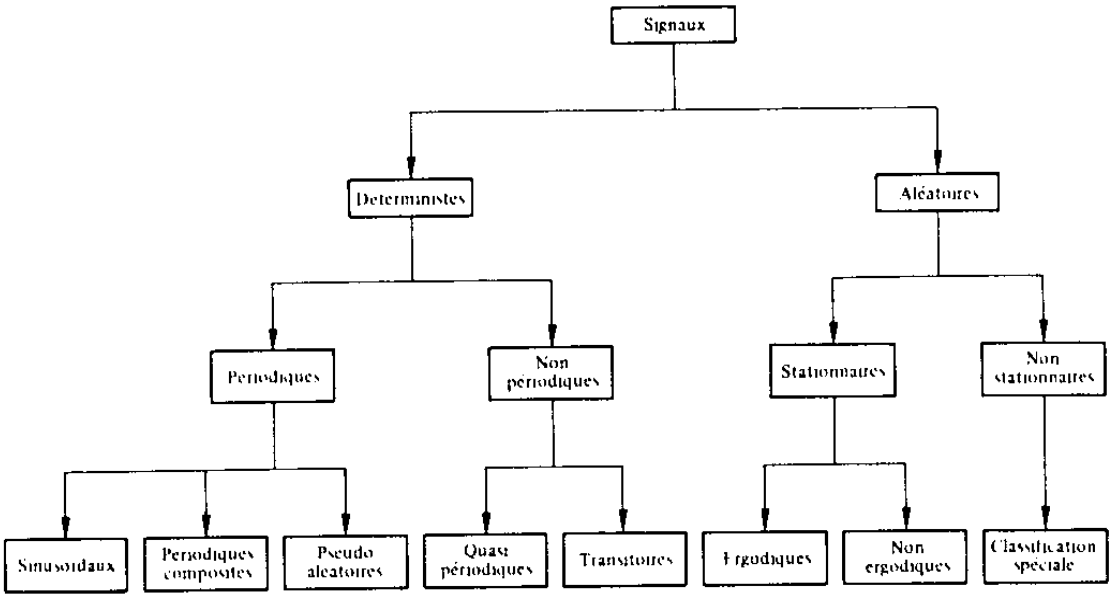
1 Signal

Nous étudierons dans ce cours les signaux continus, ou analogiques et très exceptionnellement les signaux discontinus ou numériques (échantillonnés).

Un "signal", au sens où nous l'étudierons, est une information ou "message" issu de l'appareil qui le crée et transformé par un capteur en une information électrique (microphone, caméra, photodiode, sonde de température etc.). Les signaux que nous traiterons ici sont essentiellement des signaux électriques à une dimension contrairement par exemple aux images qui sont des signaux à deux dimensions ou encore tout autre signal à n dimensions (espace +temps par exemple). L'extrapolation à des signaux d'une autre nature, opto-électronique par exemple pour la transmission sur fibre, ou image pour les capteurs caméra, est relativement immédiate car le traitement de ces signaux est basé sur les mêmes concepts.

1.1 Classification des signaux

Le tableau suivant montre une classification des signaux que nous compléterons par les définitions de stationnarité et d'ergodicité, pour ce qui concerne les processus aléatoires.



- Définitions

On définit deux classes principales de signaux déterministes : les signaux à **énergie finie** qui sont des signaux dont on ne peut pas calculer la puissance moyenne, et les signaux à **puissance moyenne finie non nulle**, dont l'énergie est infinie et dont on ne peut calculer que la puissance moyenne.

- La catégorie des signaux à énergie finie comprend tous les signaux de type **transitoire**, déterministes ou aléatoires.

- La catégorie des signaux à puissance moyenne finie comprend pratiquement tous les signaux **périodiques**, quasi-périodiques et les signaux **aléatoires permanents**. En font partie la fonction de Heaviside (échelon), la fonction constante et la fonction signe.

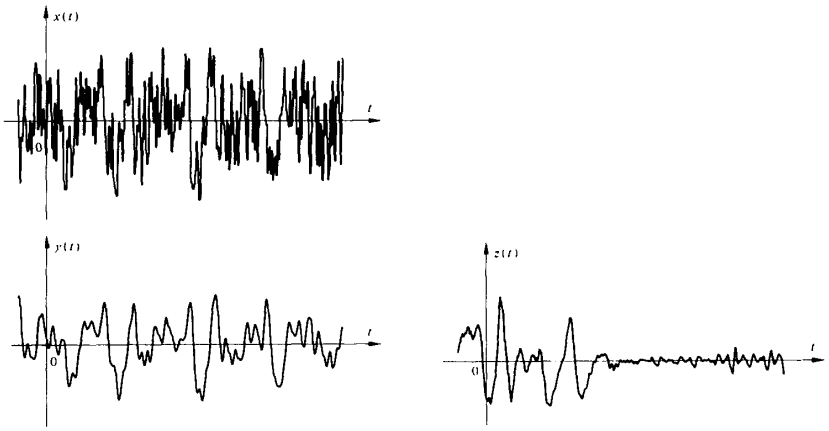
Certains signaux n'appartiennent à aucune de ces catégories. C'est le cas de $exp(at)$ pour $-\infty < t < +\infty$, ainsi que de l'impulsion de Dirac et du peigne de Dirac (fonctions que l'on définit dans le chapitre sur les distributions).

On notera bien la définition des notions d'énergie et de puissance présentées un peu plus loin.

1.1.1 Stationnarité

Définition *Un signal aléatoire (ou encore stochastique) est dit stationnaire au sens strict lorsque toutes ses caractéristiques statistiques sont conservées au cours du temps. Il est dit stationnaire d'ordre 2, par exemple, si seules ses statistiques d'ordre 1 et 2*$^{(*1)}$ *sont invariantes dans le temps.*

(*1) : On doit se référer aux définitions statistiques concernant une variable (fonction de répartition, densité de probabilité, espérance, variance, moment d'ordre n,...) ou deux variables (fonction de répartition conjointe, densité de proba. conjointe, fonction d'autocorrélation, d'autocovariance ...).



(1)

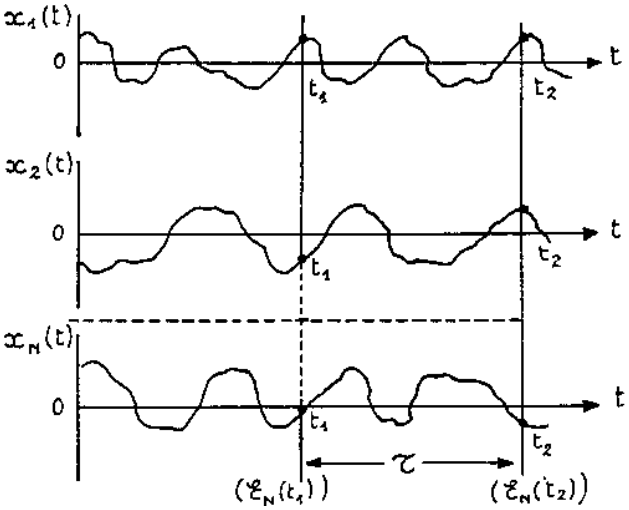
Signaux aléatoires stationnaires Signal aléatoire non-stationnaire

1.1.2 Ergodicité

Définition *Un signal aléatoire est dit ergodique lorsque l'on peut identifier sa moyenne temporelle*$^{(*2)}$ *à sa moyenne statistique, c'est à dire son espérance ou moment centré d'ordre 1*$^{(*2)}$ *.*

Sur la figure ci-dessous, les trois échantillons x_1, x_2, x_N d'un signal aléatoire ont une moyenne calculée le long de l'axe t : la moyenne temporelle d'un échantillon $x_i(t)$, et une moyenne calculée le long de l'axe x : la moyenne statistique d'un échantillon $x(t_i)$ (celles-ci sont repérées par $E_N(t_1)$ et $E_N(t_2)$ sur la figure. Lorsque le processus est ergodique, les moyennes temporelles des échantillons du signal et les moyennes statistiques sont identiques.

(*2) : voir les définitions en annexe



Signal aléatoire ergodique : $x_{moy} = cte$ (2)

1.2 Caractéristiques du signal déterministe

- Valeur moyenne sur un intervalle[a,b]. (On prend b-a = T = période du signal pour un signal périodique)

$$\boxed{\langle f(x)\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx} \tag{3}$$

- Energie sur un intervalle de temps [a,b].

$$\boxed{\Delta E_{\,f(x)} = \int_a^b |f(x)|^2 dx} \tag{4}$$

- Puissance instantanée

$$\boxed{P(x) = |\,f(x)|^2} \tag{5}$$

- Puissance moyenne sur un intervalle [a,b]

En divisant l'énergie par la durée pendant laquelle a été dissipée, on obtient la puissance, qui est une mesure de l'énergie par unité de temps.

$$\boxed{\overline{P} = \left\langle f^2(x) \right\rangle = \frac{\Delta E}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|^2 dx} \tag{6}$$

- Valeur efficace d'une fonction sur un intervalle = Racine Carrée de la Moyenne du Carré de la fonction (RMS=Root Mean Square)

$$\boxed{f_{eff}(t) = \sqrt{\overline{P}} = \sqrt{< f^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt}} \tag{7}$$

1.3 Caractéristiques du signal aléatoire (exemple : bruit)

- Variance, ou écart-quadratique moyen, d'un signal aléatoire f(t)

$$\boxed{\begin{aligned} Var(f(t)) &= \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (f(t) - \langle f(t) \rangle)^2 dt \\ &= \left\langle \ (f(t) - \langle \ f(t) \rangle)^2 \ \right\rangle = \left\langle f^2(t) \right\rangle - \langle f(t) \rangle^2 \end{aligned}} \tag{8}$$

Rappel : la valeur moyenne $\langle f(t) \rangle$ d'une variable aléatoire f est aussi appelée son **espérance mathématique**, notée $E(f)$, ou encore son **moment** d'ordre 1 [voir définition dans le formulaire].

$$E(f) = \langle f(t) \rangle \tag{9}$$

- Ecart-type d'un signal aléatoire :

$$\boxed{\sigma(x) = \sqrt{Var(f(t))} = \left\langle \ (f(t) - \langle \ f(t) \rangle)^2 \ \right\rangle} \tag{10}$$

2 Bruit

Les bruits sont des signaux aléatoires. On les caractérise donc principalement par leur puissance ou leur variance.

Si le bruit est "centré", c'est-à-dire de valeur moyenne nulle $\langle\ f(t)\rangle = 0$, sa variance est alors égale à la valeur quadratique moyenne.

$$\boxed{Var(f) = \sigma_f^2\ = \langle\ f^2(t)\rangle} \tag{11}$$

L'écart-type représente donc pour les signaux aléatoires centrés l'équivalent de la valeur efficace introduite précédemment.

- **Bruit blanc**

C'est un bruit dont la valeur moyenne est nulle, dont la fonction d'autocorrélation est un Dirac d'amplitude 1/2 et dont la densité spectrale de puissance (le carré du module de sa Transformée de Fourier, ou encore son "spectre en fréquence") est constante dans toute la bande de fréquence .

- **Bruit thermique** (ou bruit **Johnson**) : bruit dans une résistance.

  Le bruit thermique est un modèle de processus aléatoire continu, représentatif du processus gaussien. Ce type de bruit peut être considéré comme un bruit blanc dans la bande de fréquence.

Toute résistance à une température T constitue une source de tension σ_v .La valeur quadratique moyenne σ_v^2 de cette tension peut s'exprimer :

$$\boxed{\sigma_v^2 = 4kTRB \quad (Volt^2)} \tag{12}$$

où k = c^{te}de Boltzmann ($= 1,38.10^{-23} J/K$), T = température (Kelvin), R = résistance (Ohm), B = Bande spectrale (en Hz).

La valeur de la puissance thermique de bruit correspondante est donnée par :

$$\boxed{P_{th} = kTB \quad (W)} \tag{13}$$

- **Bruit de Grenaille** (ou bruit **Schottky**, ou **shot noise**) : fluctuations statistiques des porteurs de charge dans les jonctions à semi-conducteurs.

  Le bruit de grenaille est un modèle de processus aléatoire ponctuel représentatif du **processus de Poisson**.

$$\boxed{\sigma_i^2 = 2qI_0B \quad (A^2)} \tag{14}$$

où q = charge de l'e$^-$($= 1,6.10^{-19}C$), I_0 = valeur moyenne du courant continu, B = Bande spectrale (en Hz).

3 Distributions

La nécessité, en traitement de signal, de travailler sur des signaux réels quelquefois constitués d'impulsions très brèves, a conduit des physiciens (Heaviside, Dirac, Schwartz ...) à élaborer une théorie des distributions. La représentation de phénomènes brefs ou discontinus, peut alors se faire au moyen de fonctions qui possèdent les propriétés particulières de ces signaux. Ce sont principalement l'échelon ou fonction de Heaviside, l'impulsion de Dirac, le peigne de Dirac ou fonction "Sha"(nom de la lettre "Ш", en alphabet cyrillique, qui représente bien un peigne), l'impulsion rectangulaire, ou fonction porte, et l'impulsion triangulaire.

L'impulsion de Dirac est la distribution que l'on utilise le plus souvent en traitement du signal. Il est donc important de bien comprendre sa définition et ses propriétés.

- Définition du Dirac

L'impulsion de Dirac est un opérateur d'échantillonnage qui restitue la valeur f(0) d'une fonction continue à l'origine.

$$\boxed{f(0) = \langle f, \delta \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx} \tag{15}$$

Lorsque le Dirac est centré sur une autre valeur que 0, on obtient plus généralement :

$$\boxed{f(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx} \tag{16}$$

- Propriétés du Dirac

En faisant $f(x) = 1$, on obtient :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1} \tag{17}$$

- Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac est une périodisation de l'impulsion de Dirac. Cet opérateur est très utilisé dans deux opérations fondamentales du traitement du signal : la périodisation et l'échantillonnage.

$$Ш(x) = Sha(x) = \sum_{n \in Z} f(n)\delta(t-n) \tag{18}$$

$$Ш_T(x) = Sha(x) = \frac{1}{T}\sum_{n\in Z} f(n)\delta(t - \frac{n}{T}) \tag{19}$$

- Fonction de Heaviside

Encore appelée fonction échelon, $H(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leqslant 0 \end{cases}$.
On a aussi la propriété suivante :

$$H\prime(x) = \delta(x) \tag{20}$$

4 Séries de Fourier

(ou transformée de Fourier des fonctions périodiques).

La décomposition en série de Fourier permet d'exprimer un **signal périodique** sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales (et/ou cosinusoïdales) dont la fréquence est un **multiple entier** de la fréquence du signal.

4.1 Définition

On appelle série de Fourier toute série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ dont le terme général s'écrit :

$$u_n = a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \tag{21}$$

Lorsque la série converge, sa période est : $T = 2\Pi/\omega$.

Théorème

Toute fonction f(x) périodique, de période $T = \frac{2\Pi}{\omega}$, qui possède en outre les propriétés suivantes :

- elle est continue sur tout intervalle $\Delta = [a, a+T]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle possède une limite à droite et à gauche.

- elle est dérivable sur Δ, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle possède une dérivée à droite et à gauche.

est décomposable en série de Fourier sur les points où elle est continue .

On note :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)}_{u_n(x)} \\ &= a_0 + a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x + ... + a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \end{aligned}} \tag{22}$$

On appelle "harmonique" de rang "n" un n-multiple de la fréquence fondamentale. La valeur moyenne est donc l'harmonique de rang 0, le fondamental est l'harmonique de rang 1. De ce fait, on utilise aussi couramment le terme "harmoniques" pour nommer les harmoniques de rang $\geqslant 2$.

Calcul des coefficients de la série

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos n\omega x\, dx \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin n\omega x\, dx} \tag{23}$$

Attention : les expressions des coefficients a_n et b_n ci-dessus ne sont valables, d'après la relation [22], que pour $n \geqslant 1$. Il ne faut en particulier pas déduire a_0 de l'expression de a_n.

Des formules permettant le calcul des coefficients, on déduit que :

Si f **impaire** : $a_0 = 0, \quad a_n = 0$.
Si f **paire** : $b_n = 0$.

Il faut donc toujours essayer de ramener la fonction à une fonction paire ou impaire, par simple décalage, afin de faciliter le calcul des coefficients.

Dans ce cas, seul le spectre de phase, donc la phase des coefficients, varie; pas le spectre d'amplitude (voir la propriété de translation 36).

La variation de phase correspond au décalage; par exemple si le décalage est de $\Delta t = T/4$ à droite (donc le signal est "retardé"), la variation de phase est de $(-\frac{T}{4} \times \frac{2\Pi}{T})$. Un terme du développement par exemple en $\cos n\omega t$ devient $\cos n\omega(t - \frac{T}{4})$.

4.2 Ecriture complexe de la Série de Fourier

Le terme général de la série peut, en utilisant les formules d'Euler, s'écrire :

$$u_n(x) = a_n \frac{e^{jn\omega x} + e^{-jn\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega x} - e^{-jn\omega x}}{2j} = \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega x} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega x} \tag{24}$$

D'où les **coefficients de Fourier complexes**

$$\boxed{C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad ; \quad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}} \tag{25}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) e^{-jn\omega x} dx \quad (n \in Z)} \tag{26}$$

et

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx = a_0} \tag{27}$$

On en déduit (en adoptant la borne inférieure $n = -\infty$), l'expression complexe de la série :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega x}} \tag{28}$$

Ecriture des coefficients réels en fonction des coefficients complexes :

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = C_0 \\ a_n = C_n + C_{-n} \\ b_n = j(C_n - C_{-n}) \end{array}} \tag{29}$$

4.3 Ecriture en module et argument

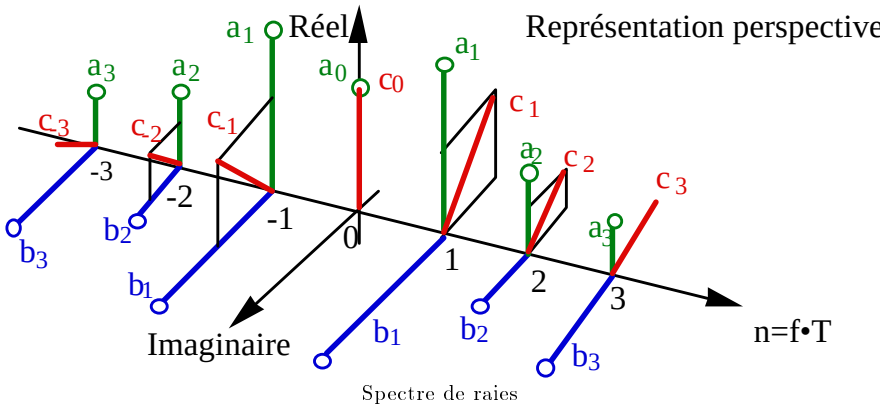
$$\boxed{f(x) = \rho_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \, cos(n\omega t + \varphi_n)} \tag{30}$$

avec

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_0 = a_0 \\ \rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = arctan(-\frac{b_n}{a_n}) \end{array}} \tag{31}$$

4.4 Spectre de raies

Puisque chaque coefficient du développement en série de Fourier représente l'amplitude d'une **sinusoïde** (ou cosinusoïde) **pure**, donc de **fréquence unique**, on représente les **coefficients** du développement en série de Fourier par un **spectre de raies dans l'espace des fréquences**. Les raies représentent les coefficients réels a_i des $cosn\omega t$ sur l'axe réel et les coefficients b_i des $sinn\omega t$ sur l'axe imaginaire, ou bien les coefficients complexes donnés par les relations 25.



Spectre de raies (32)

- On peut adopter aussi une représentation de la série de Fourier par spectre d'amplitude $|F(\nu)|$ et spectre de phase $Arg\, F(\nu)$, où $\nu = n\omega$,

$$\boxed{u_n(x) = a_n \, cos \, n\omega x + b_n \sin n\omega x = \rho_n \cos(n\omega x - \varphi_n)} \tag{33}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} |F(\nu)| = \rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ Arg\, F(\nu) = \varphi_n = -arctan(\frac{b_n}{a_n}) \end{array} \right. \tag{34}$$

4.5 Propriétés de la série de Fourier

4.5.1 Parité, Linéarité

4.5.2 Translation

Le spectre d'amplitude est invariant par translation, mais pas le spectre de phase.

Supposons le signal f(x) décalé de x_0. On appelle $g(x) = f(x-x_0)$ la fonction translatée (translation à droite = retard de x_0).

En posant $t = x - x_0$,on obtient :

$$\boxed{c_n(g) = \frac{1}{T}\int_\Delta f(x-x_0)e^{-jn\omega x}dx = e^{-jn\omega x_0}.c_n(f)} \tag{35}$$

donc

$$\begin{cases} |c_n(g)| = |c_n(f)| \\ Arg\, c_n(g) = Arg\, c_n(f) - n\omega x_0 \end{cases} \tag{36}$$

4.5.3 Conservation de l'énergie (Bessel-Parseval)

Rappel : produit scalaire généralisé

$$(f,g) = \frac{1}{T}\int_\Delta f(x).\overline{g(x)}dx \tag{37}$$

Théorème de Bessel-Parseval

Le carré de la valeur efficace, ou énergie du signal, est conservé dans la série de Fourier. Toute l'énergie du signal se retrouve dans la valeur moyenne , le fondamental et les harmoniques.

$$\boxed{(f,f) = \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \underbrace{\frac{1}{T}\int_\Delta f^2(x)dx}_{énergie} = a_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{4}} \tag{38}$$

$(Note : f_{eff} = \sqrt{\overline{P}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int f^2})$

4.5.4 Dérivation, intégration

- Dérivation : Si f est dérivable en f' et si f' est développable en S.F., le développement de f' s'obtient par dérivation terme à terme du développement en S.F. de f.

$$\boxed{f'(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} jn\omega c_n e^{jn\omega x}} \tag{39}$$

- Intégration : Si f est à moyenne nulle ($c_0 = \frac{1}{T}\int_\Delta f(x)dx = 0$) , alors

$$\boxed{g(x) = \int_0^x f(t)dt = \alpha_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{e^{jn\omega x}}{jn\omega}} \tag{40}$$

avec $\boxed{\alpha_0 = g_{moy.} = \frac{1}{T}\int_\Delta g(x)dx}$

4.5.5 Produit et convolution

- Produit : soient $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn\omega x}$ et $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n e^{jn\omega x}$

$$\boxed{(f.g)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{jn\omega x} \quad avec \quad \gamma_n = \sum_{p+q=n} \alpha_p \beta_q} \tag{41}$$

- Convolution : réciproquement si $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \beta_n e^{jn\omega x}$, alors

$$\boxed{h(x) = \int_\Delta f(t)g(x-t)dt} \tag{42}$$

4.6 Exemples de développement

4.6.1 signal carré

4.6.2 signal triangulaire

4.6.3 signal modulé en amplitude

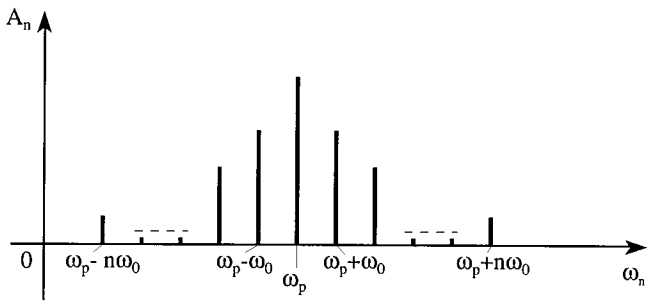
$$\boxed{f(t) = A(t)\underbrace{cos(\omega_p t)}_{porteuse}} \tag{43}$$

Si le signal modulant A(t) est supposé de **période fixe $\mathbf{T}_0$**, on peut le décomposer en séries de Fourier. On écrira :

$$A(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \ , \quad avec \quad \omega_0 = \frac{2\Pi}{T_0} \tag{44}$$

D'où

$$\boxed{f(t) = a_0 cos\omega_p t + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[A_n cos((\omega_p + n\omega_0)t - \varphi_n) + A_n cos((\omega_p - n\omega_0)t - \varphi_n)]} \tag{45}$$



(46)

Spectre de raies d'un signal modulé en amplitude.

Attention : ce spectre de raies est valable si le signal modulant est périodique et de période fixe. Dans le cas contraire, le signal modulant n'est plus décomposable en S.F. et le spectre d'amplitude est continu entre ω_p et $\omega_p \pm \omega_0$ (voir Transformée de Fourier), où ω_0 est alors la fréquence **maximale** du signal modulant.

4.7 Taux de distorsion harmonique

5 Transformée de Fourier

Par extension du développement en séries de Fourier,ou transformée de Fourier des fonctions périodiques, on définit une **transformée de Fourier des fonctions non-périodiques** où la fonction initiale est développée non plus seulement sur une base de cosinus et de sinus (ou d'exponentielles) à valeurs discrètes ($exp(n\omega t)$...) mais sur une base d'**exponentielles à valeurs continue** .

Définition *Une fonction définie sur $\Re$, continue par morceaux et absolument intégrable sur $\Re$, mais non nécessairement périodique, possède une transformée de Fourier définie par le produit scalaire suivant :*

$$\boxed{\begin{aligned}\widehat{f}(\nu) = F\left[f(x)\right] = F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\Pi j\nu x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(2\Pi\nu x)\, dx \; - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(2\Pi\nu x)\, dx\end{aligned}} \tag{47}$$

Formule de réciprocité :

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)\, e^{+2\Pi j\nu x} d\nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\Pi j\nu x} dx} \tag{48}$$

Ainsi on notera que la fonction f(x) se décompose maintenant , **dans les domaines temporel et fréquentiel**, en une somme **continue** selon une base **continue** d'exponentielles, par opposition à la base des séries de Fourier où la périodicité de f(x) permet une décomposition en une somme **discrète** selon une base **discrète** d'exponentielles. Du fait de la **non-multiplicité des composantes par rapport à la fréquence fondamentale** du signal périodique, la notion d'harmoniques a disparu.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} SF & \longleftrightarrow & TF \\ \sum & \longleftrightarrow & \int \\ n.\nu & \longleftrightarrow & \nu \end{array}} \tag{49}$$

- **Symétrie** de la transformée de Fourier et dualité temps-fréquence

  On passe de la transformée directe $\mathcal{F}$ à la transformée réciproque $\mathcal{F}^{-1}$ en appliquant les transformations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{ccr} f & \longleftrightarrow & F \\ x & \longleftrightarrow & \nu \\ j & \longleftrightarrow & -j \end{array}} \tag{50}$$

- Si la fonction f(x) est **paire**, le deuxième terme en sinus est nul (fonction impaire) et on ne conserve que le terme en cosinus

$$\boxed{\widehat{f}(\nu) = F\left[f(x)\right] = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\Pi\nu x)\,dx} \tag{51}$$

- Si la fonction f(x) est **impaire**, le premier terme en cosinus est nul et on conserve le terme en sinus

$$\boxed{\widehat{f}(\nu) = F\left[f(x)\right] = -2j\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\Pi\nu x)\,dx} \tag{52}$$

5.1 Propriétés

La plupart des propriétés de la transformée de Fourier se déduisent de celles de la série de Fourier. Le passage au domaine des signaux discrets (numériques) impose cependant de mettre l'accent sur la transformée des signaux périodiques et sur sa réciproque, la transformée des signaux échantillonnés. De même, la transformée d'une fonction rectangulaire, ou porte, reviendra aussi couramment dans les domaines analogique (fenêtrage pour le calcul de la T.F.) et numérique (échantillonnage réel etc), dont on parlera plus loin.

5.1.1 Conservation de l'énergie : Formule de Parseval-Pancherel

$$\boxed{(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)\overline{\widehat{g}(\nu)}d\nu} \tag{53}$$

$\overline{g(x)} = g^*(x)$ = complexe conjugué

5.1.2 Fonction périodique

- peigne de Dirac

$$F[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu-n) \tag{54}$$

- T.F. d'une fonction périodique

en utilisant la propriété de la convolution par un Dirac, on peut écrire :

$$f(t) = f_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \tag{55}$$

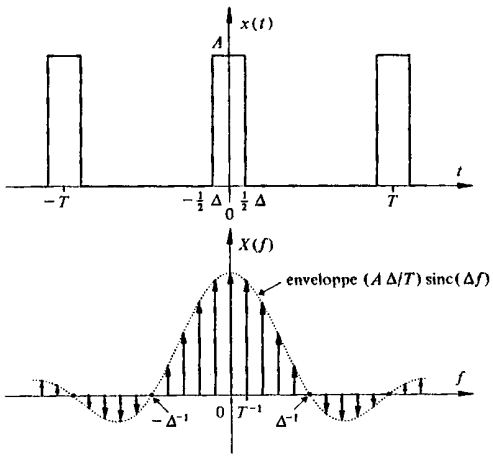
où $f_0(t)$ est le "motif" de la fonction sur une période.
En appliquant la T.F., on obtient

$$\boxed{F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \delta(\nu - \tfrac{n}{T}), \quad avec \quad c_n = \tfrac{1}{T}\hat{f}_0(\tfrac{n}{T})} \tag{56}$$

La transformée de Fourier d'une fonction périodique donne un spectre de raies. Ce résultat était attendu puisque la T.F. est dans ce cas l'analogue de la S.F.

- Exemples :

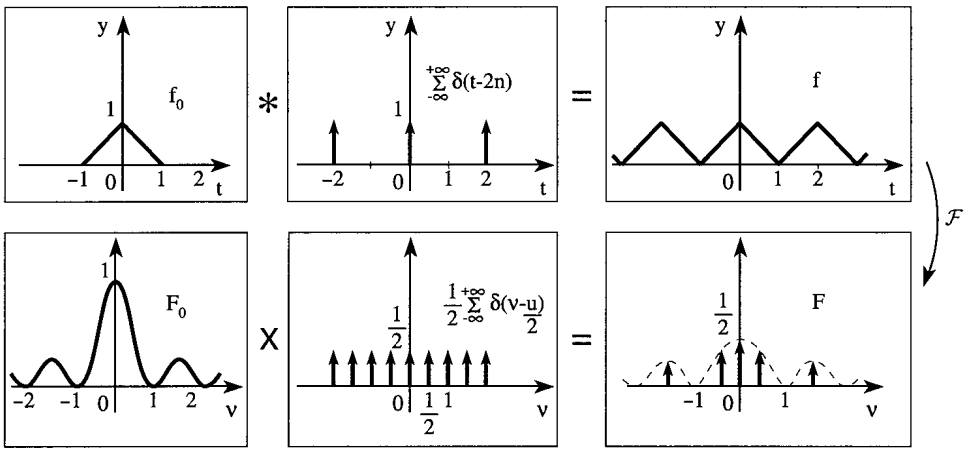
Transformée d'un rectangle périodique



(57)

Transformée d'un rectangle périodique

Transformée d'un triangle périodique



(58)

Transformée d'un triangle périodique

5.1.3 Fonction échantillonnée

Une fonction échantillonnée est composée de valeurs instantannées de la fonction prélevées à intervalles réguliers espacés de la période d'échantillonnage Te. Cette opération se représente encore comme le **produit de la fonction par un peigne de Dirac de période Te**. On obtient ainsi une fonction que l'on peut représenter par un spectre de raies dans le domaine temporel. Par application de la **réciprocité** au spectre de raies d'une fonction périodique, on en déduit directement que **la transformée de Fourier d'un signal échantillonné équivaut à la périodisation du spectre du signal**. Cette propriété est développée dans le chapitre sur l'échantillonnage.

$$\boxed{f(t).Sha_{T_e}(t) \quad \rightarrowtail \quad \hat{f}(\nu).\frac{1}{T_e}Sha_{1/T_e}(\nu)} \tag{59}$$

5.2 Représentation de la transformée de Fourier

5.2.1 Représentation dans l'espace complexe

Cette représentation est analogue à celle des coefficients complexes vue pour la série de Fourier.

5.2.2 Représentation dans en module et argument

- Au lieu de la représentation dans le plan complexe on utilise couramment une représentation du module en coordonnées linéaires et plus rarement une représentation de la phase.. On voit aussi souvent une représentation du module du spectre (par exemple dans les tables de signaux fournies plus loin)

- La représentation du module et de la phase en coordonnées logarithmiques devient la représentation de **Bode,** couramment utilisée pour la fonction de transfert des systèmes linéaires (filtres) qui est aussi la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du filtre

5.3 Résumé des propriétés de la Transformée de Fourier

$F \longrightarrow$		
$\longleftarrow F^{-1}$		
réciprocité (ou symétrie)	f	F
”	x	ν
”	j	$-j$
Définition	$x(t)$	$\hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\Pi\nu t}dt$
Linéarité (ou superposition)	$ax(t) + by(t)$	$a\hat{x}(\nu) + b\widehat{y}(\nu)$
Multiplication par une c^{te}	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{x}(\frac{\nu}{a})$
Translation tempo. (Th. du retard)	$x(t - t_0)$	$\hat{x}(\nu).e^{-2\Pi j\nu t_0}$
Translation fréq. (chgt de fréquence)	$x(t).e^{2\Pi j\nu_0 t}$	$\hat{x}(\nu - \nu_{0)}$
Cos	$cos\, 2\Pi\nu_0 t$	$\frac{1}{2}[\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)]$
Sin	$sin\, 2\Pi\nu_0 t$	$\frac{j}{2}[\delta(\nu + \nu_0) - \delta(\nu - \nu_0)]$
Modulation	$x(t).\cos 2\Pi\nu_0 t$	$\frac{1}{2}[\hat{x}(\nu + \nu_0) + \hat{x}(\nu - \nu_0)]$
Dirac	$\delta(t)$	1
Constante = 1	1	$\delta(\nu)$
Produit	$x(t).y(t)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\nu - u)\widehat{y}(u)du = \hat{x}(\nu) * \widehat{y}(\nu)$
Convolution	$x(t) * y(t)$	$\hat{x}(\nu).\widehat{y}(\nu)$
Spectre de raies	$x(t) = Sha_T(x)$	$\hat{x}(\nu) = \frac{1}{T}Sha_{1/T}(\nu)$
	$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \frac{k}{T})$
Fonction périodisée	$x(t) * Sha_T(t)$	$\hat{x}(\nu).\frac{1}{T}Sha_{1/T}(\nu)$
Fonction échantillonnée	$x(t).Sha_{T_e}(t)$	$\hat{x}(\nu) * \frac{1}{T_e}Sha_{1/T_e}(\nu)$
Complexe conjugué	$x^*(t)$	$\hat{x}^*(\nu)$
Inversion ou Symétrie verticale	$x(-t)$	$\hat{x}(-\nu)$
Dérivation	$\frac{d^{(n)}}{dt^n}[x(t)]$	$\hat{x}(\nu).(2\Pi j\nu)^{(n)}$
Intégration	$\int_{-\infty}^{u} x(t)dt$	$\frac{1}{j2\Pi\nu}\hat{x}(\nu) + \frac{1}{2}[\hat{x}(0).\delta(\nu)]$
Identité de Parseval	$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2\, df$	$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert\hat{x}(\nu)\rvert^2\, d\nu$

(60)

5.4 Relation entre la série et la transformée de Fourier

5.5 Transformées de signaux typiques

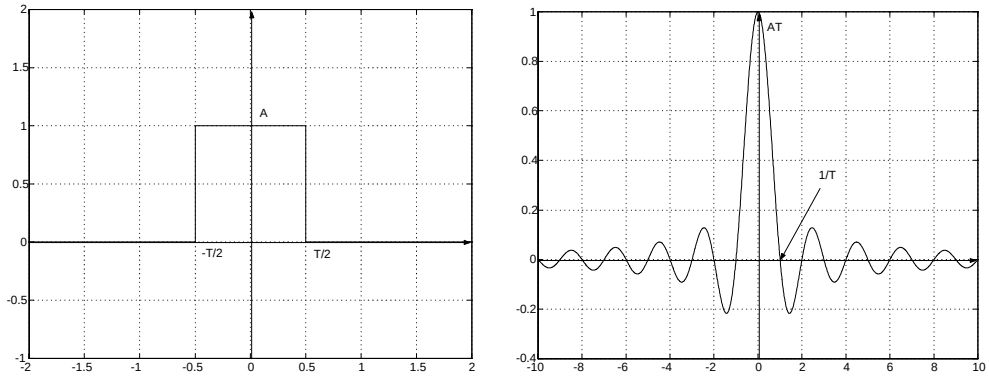
5.5.1 Impulsion rectangulaire

Transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire $\Pi_{A,T}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad \lvert x\rvert > T/2 \\ A & si \quad \lvert x\rvert < T/2 \end{cases}$

$$\boxed{F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{A,T}(x).e^{j2\Pi\nu x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{A,T}(x).cos(\,2\Pi\nu x)dx = \left[A\frac{sin(\Pi\nu T)}{\Pi\nu}\right]_{-T/2}^{+T/2} = ATsin_c(\nu T)} \tag{61}$$

- Remarque : fonction sinus cardinal

On trouve quelquefois la définition $Sin_c(x) = \frac{Sin(x)}{x}$ au lieu de $Sin_c(x) = \frac{Sin(\Pi x)}{\Pi x}$



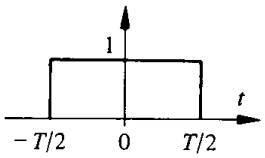
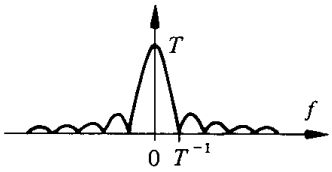
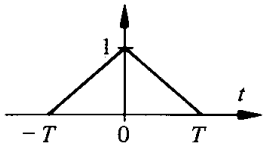
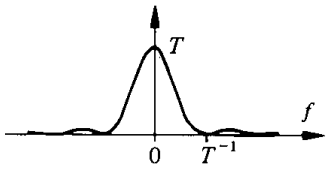
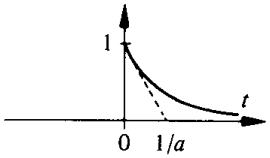
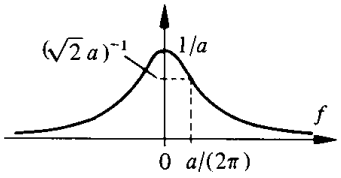
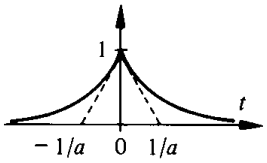
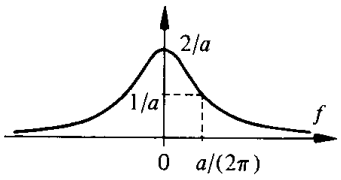
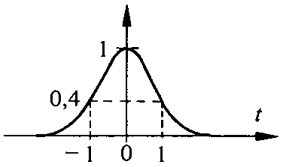
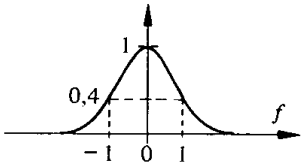
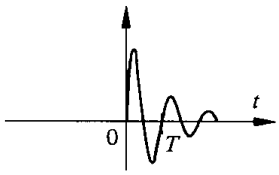
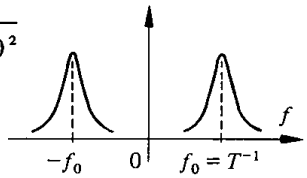
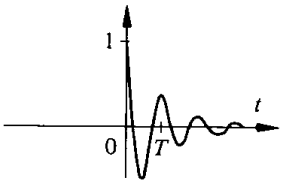
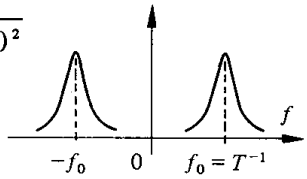
(62)

Transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire

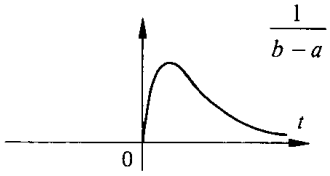
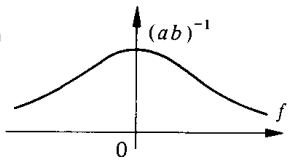
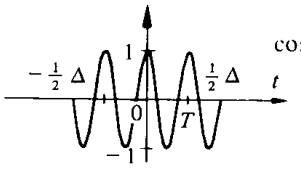
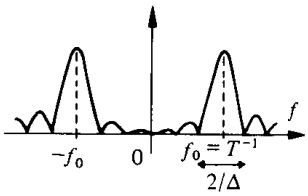
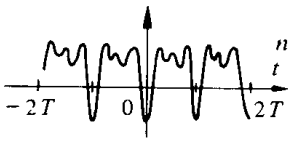
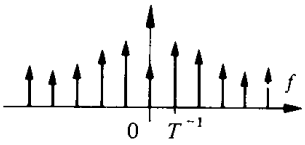
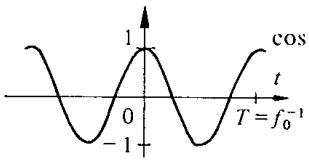
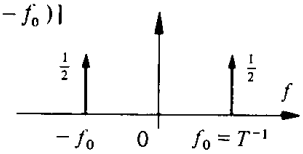
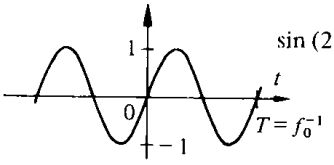
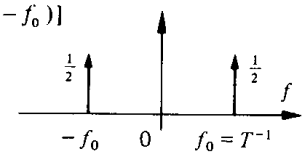
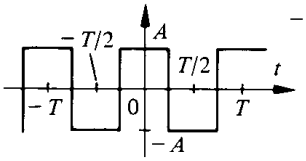
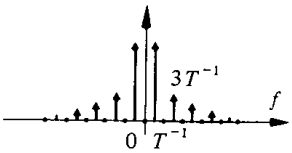
$$\Pi_{A,T}(x) \quad \longrightarrow \quad AT\,sin_c(\nu T)$$

5.5.2 Signal à décroissance exponentielle

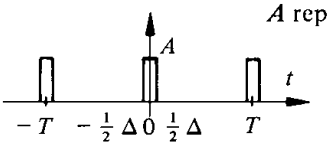
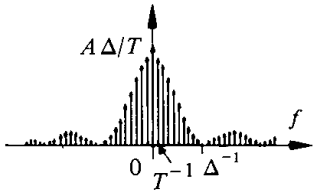
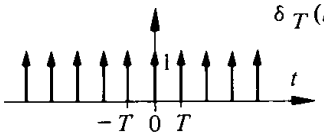
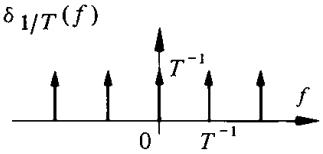
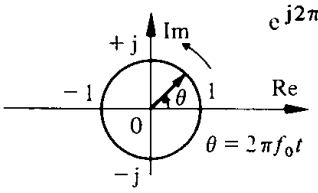
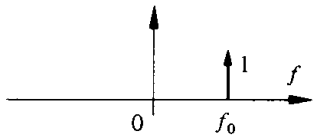
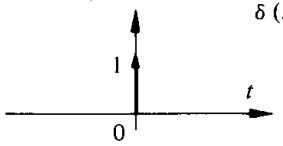
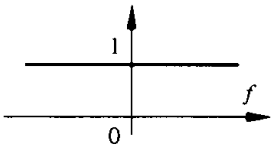
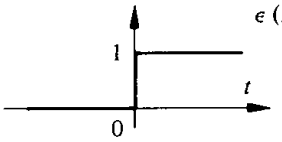
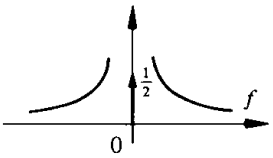
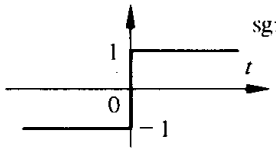
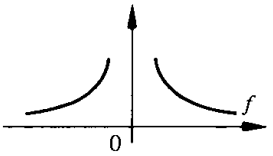
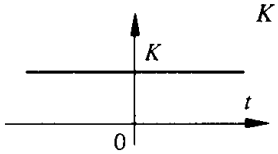
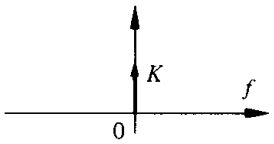
5.6 Tables de transformées

$x(t)$		$X(f)$	$\lvert X(f)\rvert$
 impulsion rectangulaire	$\mathrm{rect}(t/T)$	$T\dfrac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$ $= T\,\mathrm{sinc}(fT)$	
 impulsion triangulaire	$\mathrm{tri}(t/T)$	$T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$	
 impulsion exponentielle	$e^{-at}\epsilon(t)$	$\dfrac{1}{a+j2\pi f}$	
 double exponentielle	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$	
 impulsion gaussienne	$\mathrm{ig}(t)=e^{-\pi t^2}$	$\mathrm{ig}(f)=e^{-\pi f^2}$	
 sinusoïde amortie	$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)\,\epsilon(t)$	$\dfrac{2\pi f_0}{(a+j2\pi f)^2+(2\pi f_0)^2}$	
 cosinusoïde amortie	$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)\,\epsilon(t)$	$\dfrac{a+j2\pi f}{(a+j2\pi f)^2+(2\pi f_0)^2}$	

(63)

$x(t)$	$X(f)$	$\lvert X(f)\rvert$
 $\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)\epsilon(t)$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)(b+j2\pi f)}$	
 $\cos(2\pi f_0 t)\cdot \mathrm{rect}(t/\Delta)$ impulsion cosinusoïdale	$\frac{\Delta}{2}\{\mathrm{sinc}[\Delta(f+f_0)] + \mathrm{sinc}[\Delta(f-f_0)]\}$	
 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi \frac{nt}{T}}$ signal périodique	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$	
 $\cos(2\pi f_0 t)$ signal cosinusoïdal	$\frac{1}{2}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]$	
 $\sin(2\pi f_0 t)$ signal sinusoïdal	$\frac{j}{2}[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$	
 $A\,\mathrm{rep}_T[2\,\mathrm{rect}(2t/T) - \mathrm{rect}(t/T)]$ onde carrée	$\sum_n X_n \delta(f-n/T)$ avec $X_n = A\,\mathrm{sinc}(n/2)$ $= \begin{cases} \left\lvert\frac{2A}{\pi n}\right\rvert & \text{pour } n=\pm 1, \pm 5, \ldots \\ -\left\lvert\frac{2A}{\pi n}\right\rvert & \text{pour } n=\pm 3, \pm 7, \ldots \end{cases}$ $X_n = 0$ pour n nul ou pair	

(64)

$x(t)$	$X(f)$	$\lvert X(f)\rvert$
$A \operatorname{rep}_T[\operatorname{rect}(t/\Delta)]$  suite d'impulsions rectangulaires	$\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = \frac{A\Delta}{T} \operatorname{sinc}(n\Delta/T)$	
$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$  peigne de Dirac	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T}\delta_{1/T}(f)$	
$e^{j2\pi f_0 t}$ 	$\delta(f - f_0)$	
$\delta(t)$  impulsion unité (Dirac)	1	
$\epsilon(t)$  saut unité	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	
$\operatorname{sgn}(t) = \frac{t}{\lvert t\rvert}$  fonction signe	$\frac{1}{j\pi f}$	
K  constante	$K\delta(f)$	

(65)

6 Convolution

6.1 Introduction

Le produit de convolution est un outil qui permet de trouver de manière simple la **réponse d'un système linéaire à un signal d'entrée**. Pour cela, il utilise les propriétés suivantes :

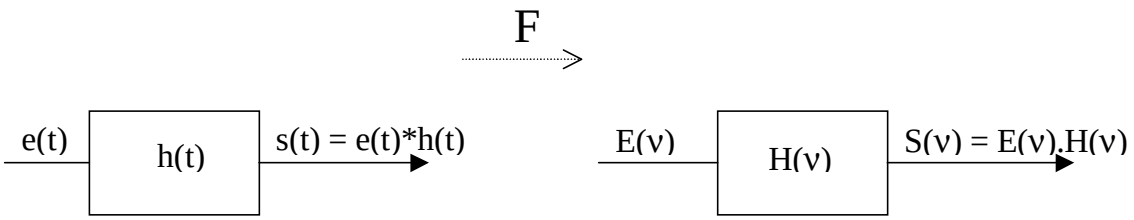
1. La sortie d'un système linéaire invariant dans le temps est donnée par le **produit de convolution de sa réponse impulsionnelle avec le signal d'entrée**(*)ou encore par le produit de convolution de sa réponse indicielle avec la dérivée du signal d'entrée(*).

[* : la démonstration de ces deux points se fait en utilisant le principe de superposition que vérifie tout système linéaire et en décomposant le signal d'entrée en une série d'échelons ou d'impulsions.]

2. Un **système linéaire** est entièrement déterminé par sa **réponse impulsionnelle h(t)** ou par sa **réponse indicielle R(t)**. En particulier, la fonction de réponse fréquentielle de ce système, ou **fonction de transfert H**(ν), est égale à la **T.F. de sa réponse impulsionnelle**.

3. La transformée de Fourier du produit de convolution dans l'espace temporel est un produit simple dans l'espace dual fréquentiel.

Ces propriétés sont résumées dans le schéma suivant :



(66)

L'opérateur de convolution est à la base de l'opération de filtrage temporel.

<u>En conclusion</u>

Si l'on considère le système linéaire H de fonction de transfert $H(\nu)$, de réponse indicielle $R(t)$ et de réponse impulsionnelle $h(t)$,

- a) sa **réponse temporelle** à un signal d'entrée e(t) est donnée par

$$\boxed{s(t) = e(t) * h(t) = R(t) * e'(t)} \tag{67}$$

- b) sa **réponse fréquentielle** au signal e(t), dont la T.F. est $E(\nu)$, est :

$$\boxed{S(\nu) = H(\nu).E(\nu)} \tag{68}$$

avec :

$$\begin{array}{ccc} e(t) & \longleftrightarrow & E(\nu) \\ h(t) & \longleftrightarrow & H(\nu) \end{array} \tag{69}$$

6.2 Définition de l'intégrale de convolution

$$\boxed{(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt} \tag{70}$$

Si les deux fonctions sont nulles sur $\Re^-$, on obtient :

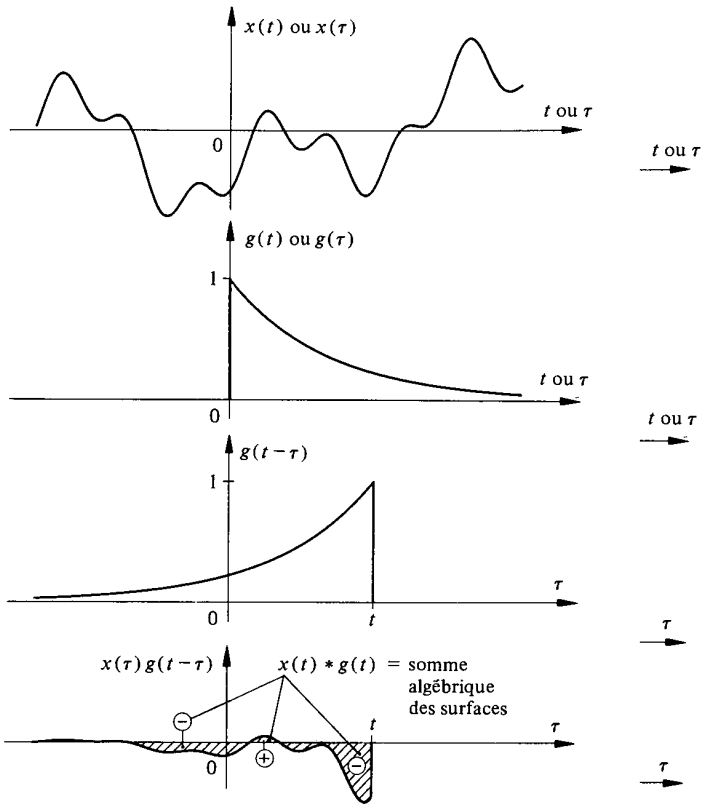
$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \tag{71}$$

- Interprétation physique pour un système causal.

Nous avons vu en introduction que le produit de convolution est la base de l'opération de filtrage, et donc correspond à l'opération la plus fondamentale en traitement du signal. Considéré plus physiquement, l'opérateur de convolution permet de trouver la sortie d'un système linéaire en effectuant la **sommation, pondérée par la fonction de filtrage du système linéaire (nommée réponse impulsionnelle), des valeurs passées et présente** (en considérant le système linéaire "**causal**" donc g(t<0)=0) **d'un signal d'entrée**.

Exemple (voir figure [72]) : On injecte un signal x(t) dans un filtre passe-bas du premier ordre dont la réponse impulsionnelle est : $g(t) = \frac{1}{RC} exp(-\frac{t}{RC})$, c'est à dire une exponentielle décroissante, pour t >0.

Le produit de convolution de la réponse g(t) du filtre avec le signal x(t) résulte, pour chaque valeur du paramètre τ de la convolution, en une sommation sur ce signal d'entrée dans laquelle le filtrage joue le rôle d'**oubli progressif** (puisque pour le calcul de la convolution on symétrise par rapport à Oy la réponse impulsionnelle) pour les valeurs passées du signal d'entrée.



(72)

Interprétation physique de la convolution : l'effet de "sommation pondérée"

Propriétés

- Le produit de convolution est bilinéaire (linéaire, ou distributif, à gauche et à droite par rapport à l'addition), symétrique (commutatif) et associatif.

$$\begin{gathered} f * (g_1 + \lambda g_2) = f * g_1 + \lambda(f * g_2) \\ (f_1 + \lambda f_2) * g = f_1 * g + \lambda(f_2 * g) \\ f * g = g * f \\ (f * g) * h = f * (g * h) \end{gathered} \tag{73}$$

- Dérivation

$$(f * g)\prime = f\prime * g = f * g\prime \tag{74}$$

- Intégration

$$\int (f * g)(x)dx = \int f(x)dx. \int g(x)dx \tag{75}$$

- Identité

$$(f * \delta)(x) = f(x) \tag{76}$$

- Translation d'une fonction

$$f(x) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0) \tag{77}$$
$$f(x - x_1) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0 - x_{1s}) \tag{78}$$

- Translation d'un produit de convolution

$$(f * g)(x - a) = f(x - a) * g(x) = f(x) * g(x - a) \tag{79}$$

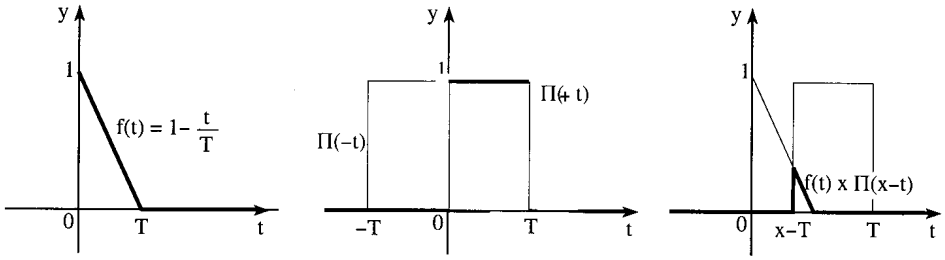
6.3 Convolution graphique

L'intégrale de convolution comporte un **paramètre** x et une **variable d'intégration** t dite "**muette**". En effet pour chaque valeur du paramètre x, le produit de convolution est égal à l'aire représentée par l'intersection des deux fonctions f(t) et g(x-t), donc à l'intégrale recalculée pour la nouvelle valeur du paramètre x. Le calcul graphique de la convolution se fait donc en prenant le symétrique par rapport à Oy de la fonction g(t), puis en faisant "glisser" la fonction g(x-t) de gauche à droite sur la fonction f(t), au moyen de la variation du paramètre x et en calculant l'intégrale de convolution pour chaque valeur de x.

- Convolution d'une porte Π_T par un triangle.

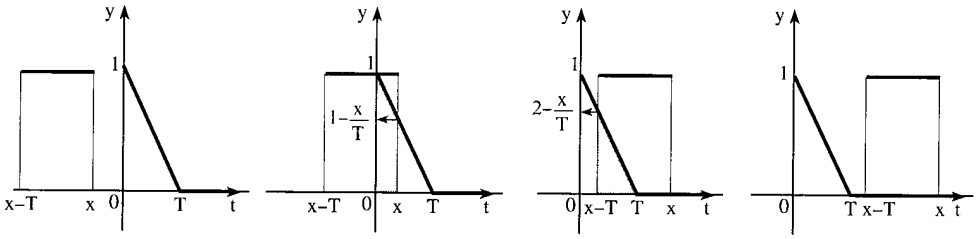
La fonction triangle est définie par : $f(t) = (1 - \frac{t}{T})$
On calcule le produit de convolution :

$$f * \Pi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Pi(x - t)dt \tag{80}$$



Triangle-Porte-Convolution graphique

(81)

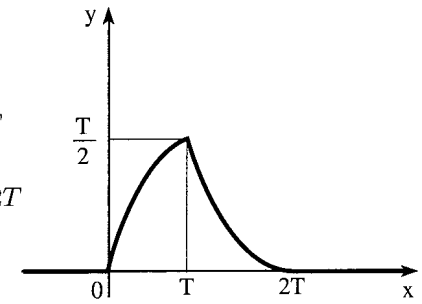


$\mathcal{A} = 0$ $\quad \mathcal{A} = \frac{x}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{x}{T}\right)\right]$ $\quad \mathcal{A} = \frac{1}{2}(2T - x)\left(2 - \frac{x}{T}\right)$ $\quad \mathcal{A} = 0$

(82)

Différentes valeurs de l'intégrale en fonction de x

$$(f*\Pi)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2T}\, x(2T - x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant T \\ \dfrac{1}{2T}\,(2T - x)^2 & \text{si } T \leqslant x \leqslant 2T \\ 0 & \text{si } x \geqslant 2T \end{cases}$$

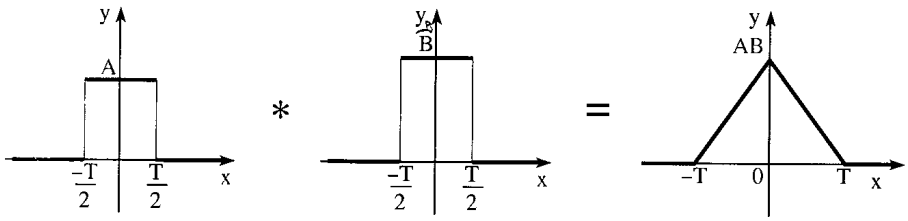


Résultat graphique de la convolution (83)

- Convolution d'une porte par une porte

En utilisant la même méthode que ci-dessus, on calcule graphiquement :

$$y_A * y_B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_A(t) y_B(x-t) dt \tag{84}$$



Convolution d'une porte par une porte

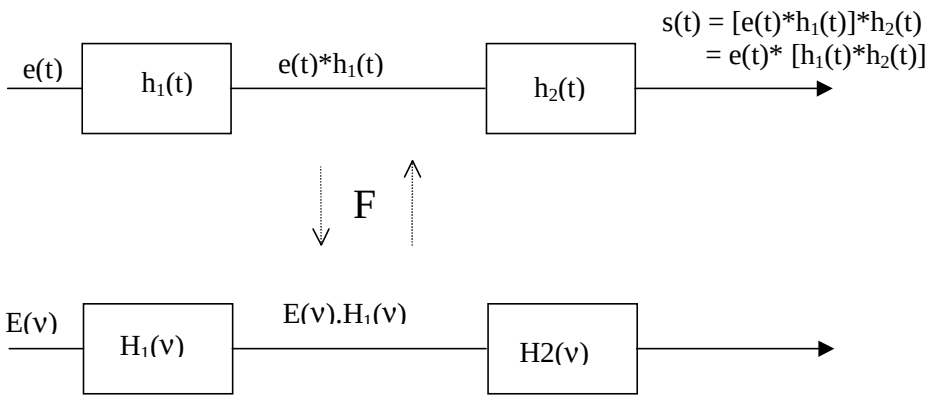
(85)

7 Filtrage linéaire

Nous avons vu que l'opération de **convolution** est celle qui caractérise le filtrage d'un signal, ou sa "**dégradation**", par un système linéaire invariant dans le temps. Ainsi tout signal passant à travers un filtre verra sa **résolution** (ou sa qualité) **diminuer**. C'est le cas par exemple dans un système optique où une lentille joue le rôle de filtre et dégrade toujours la résolution de l'information lumineuse qui passe à travers. On dit que le **pouvoir séparateur** du système optique est "limité". Dans un filtre électronique, le principe est identique. Il y a toujours une **perte d'information** dans une opération de convolution.

7.0.1 Filtres en cascade

Lorsque deux filtres sont mis en "cascade", c'est-à-dire que la sortie du premier filtre est réinjectée dans le second, le calcul de la réponse impulsionnelle se fait en **convoluant les réponses impulsionnelles** de deux filtres. Lorsque l'on passe dans le domaine fréquentiel, on voit que l'opération de mise en cascade correspond à un **produit des réponses fréquentielles** (les fonctions de transfert). Cette dernière propriété fait que l'on préfèrera en général utiliser la réponse fréquentielle plutôt que la réponse temporelle pour caractériser un filtre.



Mise en cascade de filtres (86)

- Application à la propagation d'une impulsion rectangulaire dans un câble.

7.0.2 Analyse "qualitative" du filtrage

La relation entre réponse temporelle et réponse spectrale du filtre peut se faire qualitativement. Cette vision "physique" et "comportementale" du filtre peut s'avérer très utile pour vérifier, ou anticiper, le calcul de sa réponse temporelle à un signal connu.

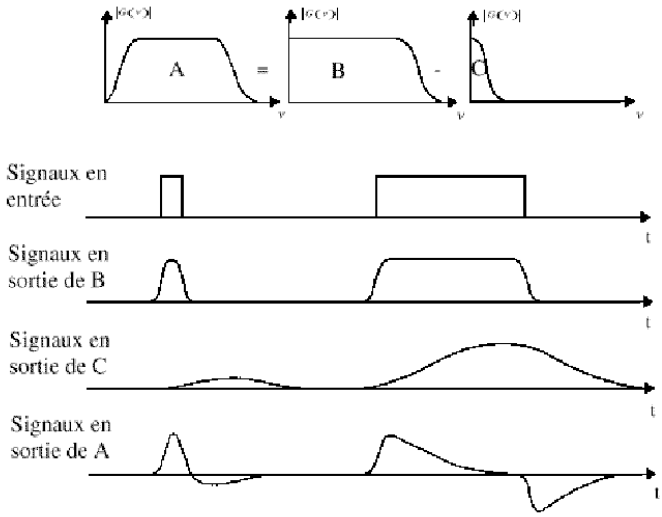
Faisons d'abord quelques constatations sur l'occupation spectrale des signaux :

La partie **rapidement** variable d'un signal est riche en **hautes fréquences** (se rappeler le phénomène de Gibbs où la décomposition d'un signal carré est de plus en plus précise au fur et à mesure que les sinusoïdes qui le composent sont de fréquence élevée).. A l'inverse la partie **lentement** variable est riche en **basses fréquences**. Un signal sinusoïdal pur comporte une seule fréquence haute

ou basse. La somme de deux sinusoïdes de fréquences élevées donne un signal de fréquence élevée, **sans composante basse fréquence**. Un Dirac présente une réponse spectrale **constante**. Un carré (porte) se présente sous la forme d'une fonction sinc présentant des harmoniques en diminution, mais à l'infini).

Lorsqu'un signal est filtré par un filtre **passe-bas**, ses parties lentement variables seront donc conservées au détriment des parties rapidement variables. Le phénomène s'inversera bien sûr avec un filtre passe-haut. Un filtrage passe-haut limite les fréquences basses. Pour un filtre d'ordre supérieur à 1, la réponse impulsionnelle peut en plus être **oscillante** : le filtre présente un **facteur d'amortissement**. Avec ce type de filtre il est alors possible de supprimer la composante de plus basse fréquence : la **valeur moyenne**, lorsque la réponse oscille autour de 0.

La figure ci-dessous indique comment prévoir le comportement de signaux carrés qui traversent un filtre passe-bande A, en décomposant ce filtre en deux filtres passe-bas de bandes différentes.



(87)

Effet d'un filtrage passe-bande sur des signaux carrés par soustraction de la réponse à deux passe-bas

7.0.3 Fenêtrage

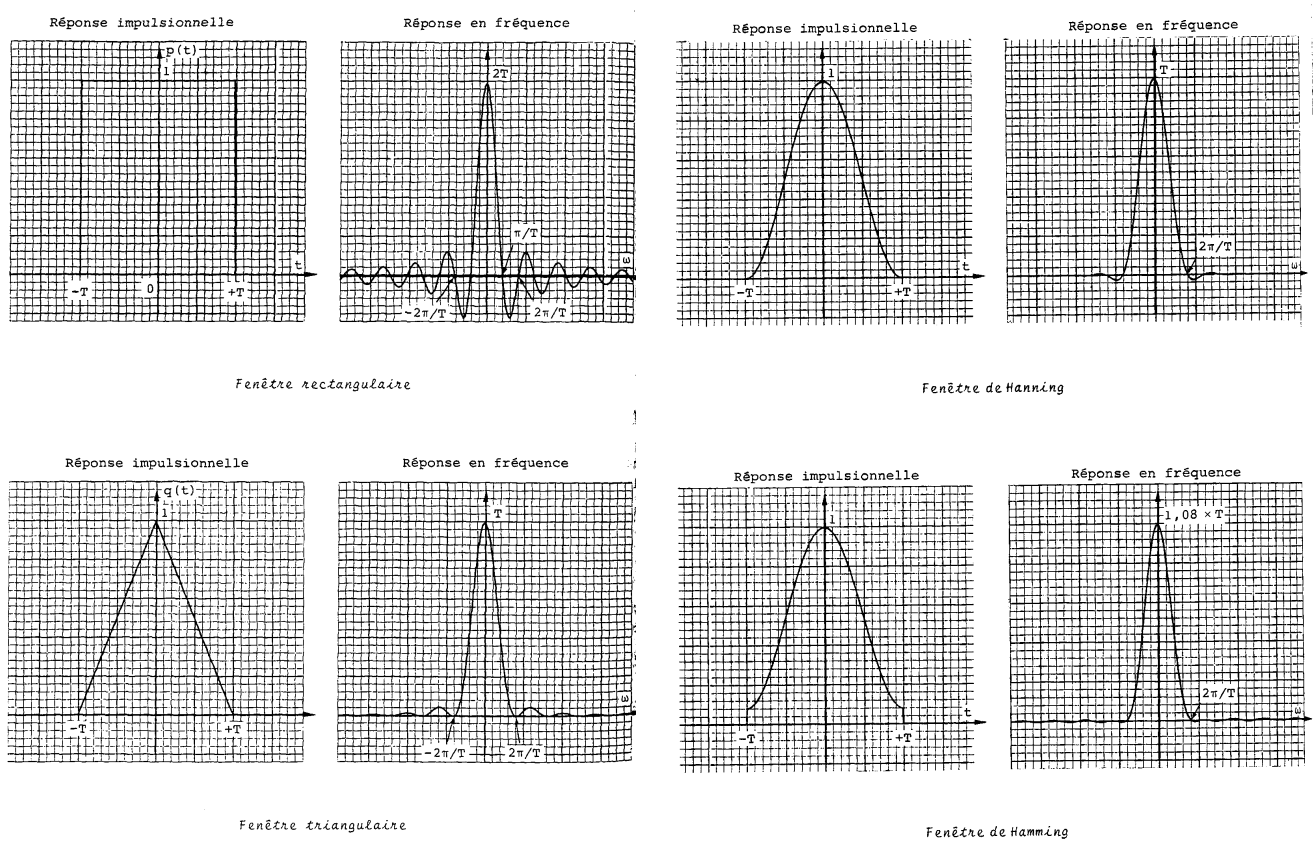
La connaissance d'un signal réel ne peut se faire que par observation dans un intervalle de temps limité, donc ne permet pas d'affirmer qu'il existe une fonction mathématique connue qui caractérise ce signal, afin d'en trouver la transformée de Fourier. L'analyse spectrale réelle nécessite donc de sélectionner un échantillon de dimension temporelle finie pour pouvoir effectuer une transformée de Fourier.

Ceci revient à fixer la durée du signal en le multipliant par une fonction "fenêtre" (réponse impulsionnelle) de durée limitée (on dit aussi de **support compact**). Ainsi le signal sera nul en dehors de cette fenêtre.

Comme nous le savons, le résultat de la multiplication dans le domaine temporel est une convolution dans le domaine fréquentiel. Ainsi le spectre du signal à analyser devra être **convolué par le spectre de la fonction de fenêtrage**.

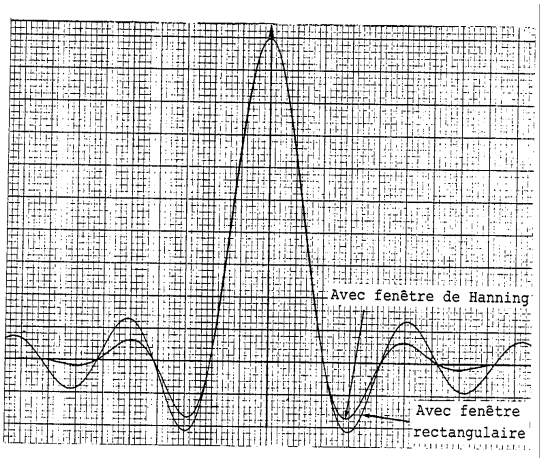
Dans le cas d'une fenêtre d'observation rectangulaire (fonction **porte**), la T.F. de cette fenêtre est une fonction **sinc**, fonction qui présente des oscillations négatives et positives importantes. Lorsque la fonction de fenêtrage est un **triangle** (ou fenêtre de **Bartlett**), les oscillations négatives n'existent plus, mais les oscillations positives sont encore présentes vers le haut de la bande spectrale (voir figure). Il existe des fenêtres d'analyse dont le spectre de fréquence est rapidement amorti. C'est le cas par exemple des fenêtres de **Hamming** (R.W. Hamming) et de **Hanning** (J.Van Hann). Dans le cas de la fenêtre de Hamming, 96% de l'énergie se trouve dans le premier lobe et l'amplitude du lobe latéral est inférieure à 1%. En revanche la largeur du lobe principa est deux fois celle de la fenêtre rectangulaire.

Pour la fenêtre de Hanning, le lobe latéral négatif est plus important mais les lobes suivants sont fortement atténués.

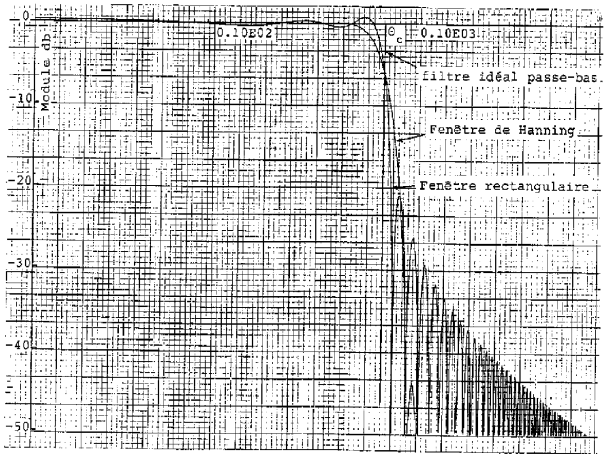


Représentation temporelle et fréquentielle de fenêtres d'observation

(88)



Réponses impulsionnelles
Filtre cardinal avec fenêtre rectangulaire et fenêtre de Hanning



Réponse en fréquence du filtre cardinal
Fenêtre rectangulaire et fenêtre de Hanning de même largeur

(89)

- Construction de la fenêtre de Hamming
- voir figs [88, 93, 94]

Réponse impulsionnelle :

$$\boxed{Hamming(t) = h_m(t) = rect_T(t).[0,54 + 0,46\,cos(2\Pi\tfrac{t}{T})]} \tag{90}$$

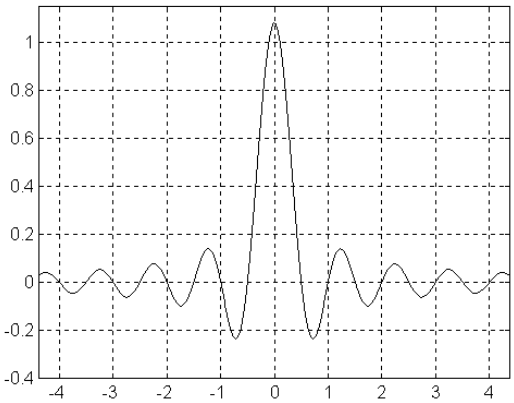
La représentation spectrale se décompose en deux éléments :

$$\begin{aligned} H_m(\nu) &= 0,54.TF\{rect_T(t)\} + 0,46.[TF\{rect_T(t)\} * TF\{cos(2\Pi\frac{t}{T})\} \\ &= 0,54.T.sinc(\nu T) + 0,46.T.sinc(\nu T) * \frac{1}{2}[\delta(\nu + \frac{1}{T}) + \delta(\nu - \frac{1}{T})] \end{aligned} \tag{91}$$

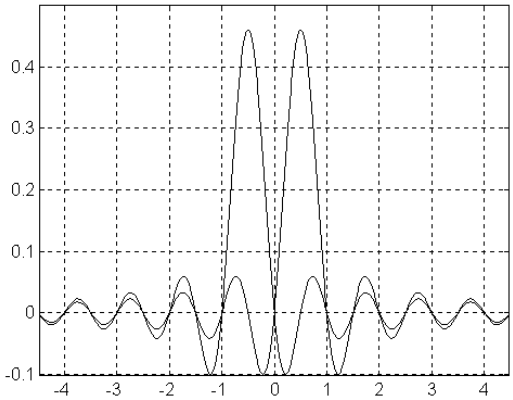
d'où

$$\boxed{Hamming(\nu) = T.\{0,54.sinc(\nu T) + 0,23[sinc(\nu T - 1) + sinc(\nu T + 1)]\}} \tag{92}$$

- Tracé de la fenêtre de Hamming pour $rec_{2T}(t) = 2\ T$ (ou T = 2) :

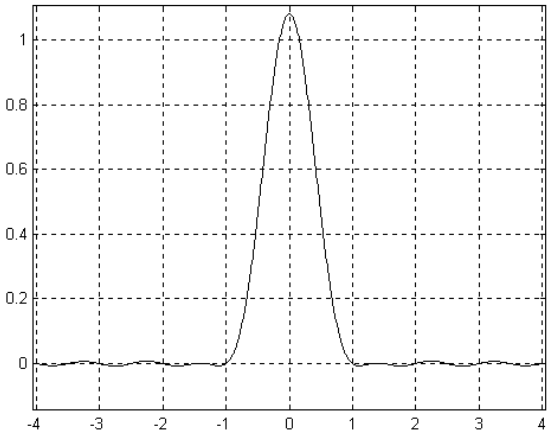


$T.\{0,54.sinc(\nu T)\} \quad avec \quad T = 2$



$T.\{0,23[sinc(\nu T-1)+sinc(\nu T+1)]\} \quad avec \quad T = 2$

(93)



(94)

Fenêtre de Hamming (T=2)

- Expression de la fenêtre de Hanning :

voir fig [88]

$$\boxed{Hanning(t) = h_n(t) = 0,5.(1 + cos\frac{2\Pi t}{T})} \tag{95}$$

8 Echantillonnage

8.1 Principe de l'échantillonnage

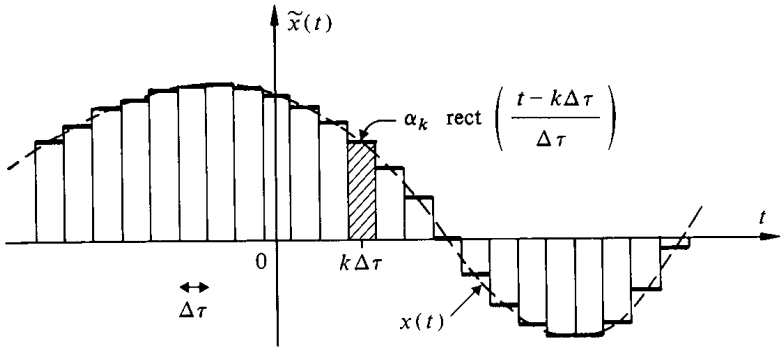
L'échantillonnage consiste à remplacer un signal analogique continu par une série d'échantillons de ce signal prélevés à intervalles réguliers qui correspondent à sa **période d'échantillonnage**. Le résultat est un signal **numérique** ou **numérisé**. Plusieurs facteurs vont cependant causer des différences entre le signal analogique et sa représentation numérique :

- La **fréquence** d'échantillonnage.
- La **méthode** d'échantillonnage
- Le **pas de quantification** ou la précision de numérisation.
- Le **temps de réponse** du système.

8.2 Approximation d'une fonction par une série d'impulsions (convolution)

Le signal $f(t)$ échantillonné ci-dessous peut être approché par une suite d'impulsions centrées en T_e et d'amplitude $T_e \times f(nT_e)$. Si l'on considère T_e suffisamment petit, f(t) peut être représenté par une suite d'impulsions de Dirac. Dans ce cas, on obtient la relation :

$$\tilde{f}(t) = f(t) \times \sum_{-\infty}^{+\infty} T_e \delta(t - nT_e) \tag{96}$$



(97)

Première représentation de l'échantillonnage réel: par impulsion centrée

8.3 Transformé de Fourier d'une fonction échantillonnée

Un signal **échantillonné**, ou numérisé, peut être considéré, dans le domaine temporel, comme la **multiplication du signal par un peigne de Dirac** dont la période T_s correspond à celle du signal.

La transformée de Fourier du signal échantillonné est donc le produit de convolution du spectre du signal initial par un peigne de Dirac dont la période, dans le domaine fréquentiel, est égale à $f_s = \frac{1}{T_s}$

Note : Cette transformée est la symétrique de la **périodisation** d'un signal que l'on réalise en **convoluant** ce signal avec un peigne de Dirac.

$$\tilde{f}(t) = f(t) \times \sum_{-\infty}^{+\infty} T_e \delta(t - nT_e) \quad \overset{F}{\longleftrightarrow} \quad F(\nu) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \frac{n}{T_e}) \tag{98}$$

$$\boxed{\textbf{L'échantillonnage provoque une périodisation du spectre en fréquence.}} \tag{99}$$

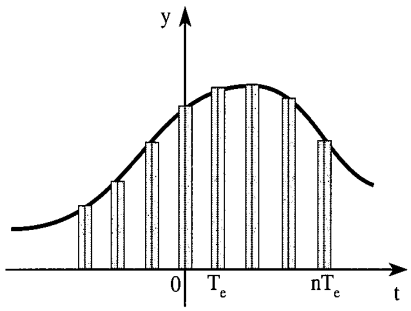
8.4 Théorème de Shannon ou théorème de l'échantillonnage

Théorème : *Un signal est parfaitement déterminé par échantillonnage si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale à deux fois la fréquence maximale du signal.*

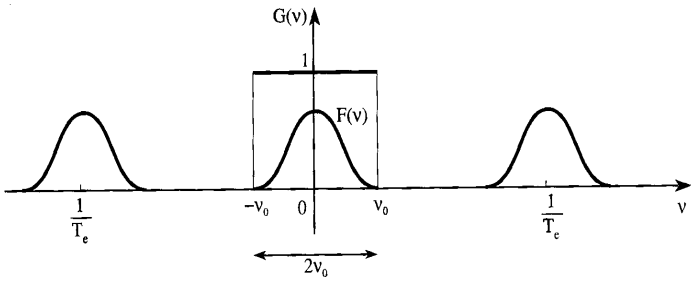
Le spectre d'une fonction échantillonnée met en évidence que les spectres élémentaires décalés (par produit de convolution avec un peigne de Dirac) du signal continu restent disjoints tant que la fréquence d'échantillonnage est supérieure à deux fois la largeur du spectre élémentaire :

$$\text{Spectres élémentaires disjoints} \quad \Longleftrightarrow \quad f_e \geqslant 2f_s \tag{100}$$

Il suffit alors pour "récupérer" le signal d'origine de filtrer ce spectre élémentaire par une porte de largeur $2f_s$ et d'effectuer une T.F. inverse du motif ainsi isolé. En pratique on ne s'occupe que des fréquences réelles, donc entre 0 et f_s, et l'on utilise un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est égale à fs. De plus, afin d'éviter tout risque de violation du théorème de Shannon, on limite généralement par filtrage à $\frac{f_e}{2}$ la bande du signal avant son échantillonnage à la fréquence f_e. Cette troncature du signal s'appelle filtrage de **Nyquist**.



Echantillonnage temporel du signal f(t)



Spectre en fréquence du signal f(t) échantillonné à fe >2fs.
Le signal est parfaitement déterminé par filtrage de largeur 2fs

(101)

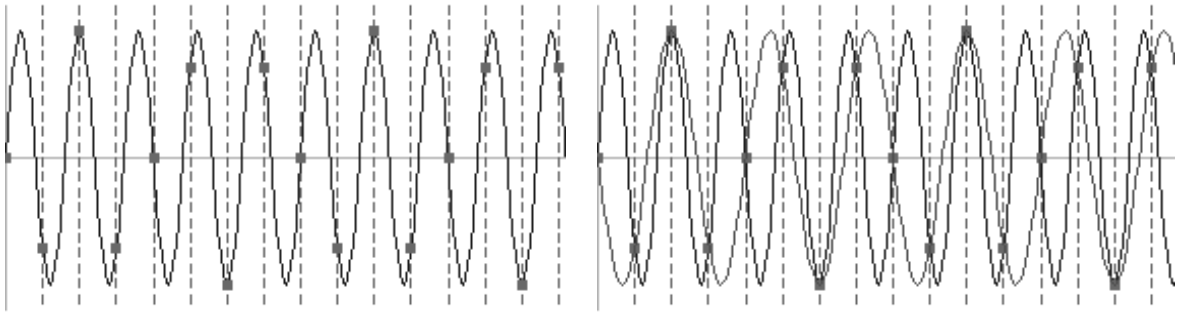
8.5 Sous-échantillonnage du signal

Conséquence du théorème de Shannon :

Lorsque la fréquence d'échantillonnage fe est inférieure à 2fs, ou fs >fe/2, il y a **repliement** (en Anglais **aliasing**) du spectre du signal de départ. La fréquence "vue" est alors inférieure à la fréquence vraie du signal.

8.5.1 Représentation temporelle du sous-échantillonnage

La figure ci-dessous montre la position des échantillons à une fréquence <2fs. La figure 2 montre quelle est la fréquence "vue".



Sous-échantillonnage: fe <2fs Conséquence du sous-échantillonnage

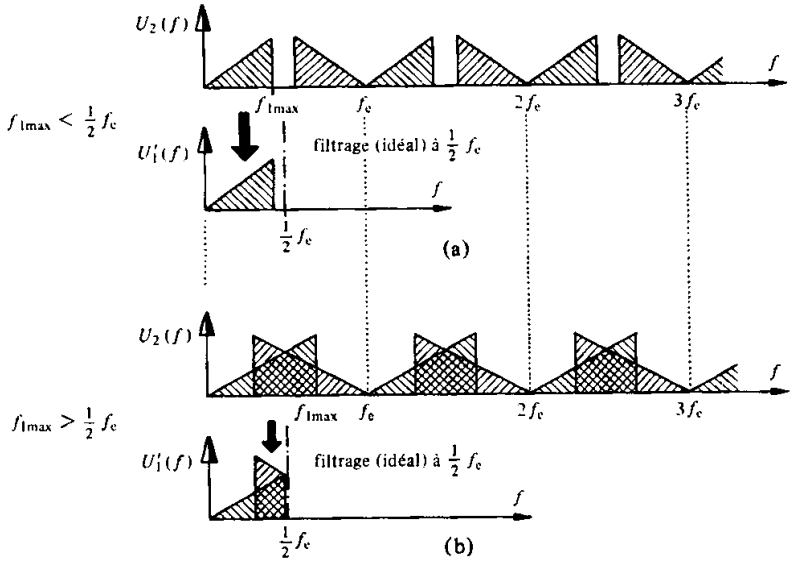
(102)

8.5.2 Représentation fréquentielle du sous-échantillonnage : le repliement de spectre

Remarque : Représentation de la bande spectrale du signal

En pratique, et c'est la représentation couramment utilisée pour l'analyse spectrale et les modulations, on représentera par un triangle la bande spectrale occupée par un signal. La pente du triangle est toujours orientée dans le sens de la valeur absolue croissante de la fréquence. Le spectre d'un signal dans le domaine des fréquences positives et négatives est donc représenté par deux triangles joints par leur pointe à l'origine des fréquences. Le côté vertical du triangle correspond à la fréquence maximale (ou minimale atteinte dans la bande).

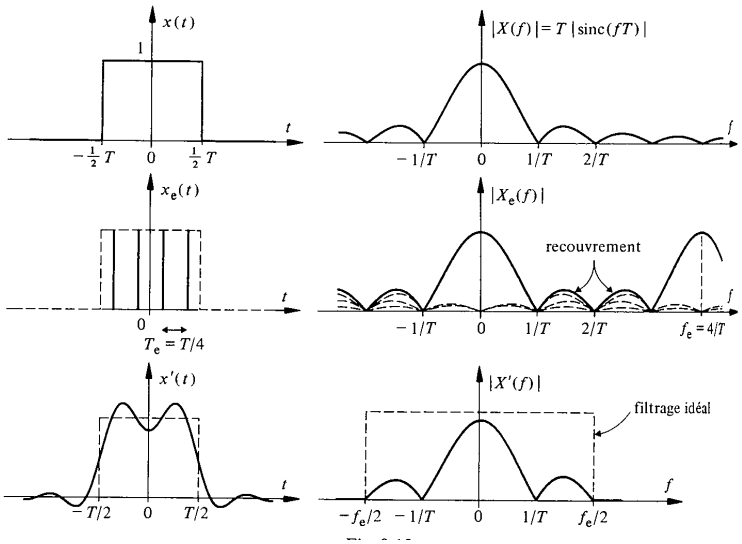
Lorsque le signal est en **bande de base**, le(s) triangle est noir. Lorsque le signal est en **bande transposée** (par changement de fréquence ou modulation), le(s) triangle est blanc. Si le signal n'est composé que d'une seule fréquence (sin ou cos) on peut remplacer le côté vertical du triangle par une flèche verticale, indiquant qu'il s'agit d'un Dirac.



(103)

Représentation spectrale d'un signal
1) correctement échantillonné à $f_{max} < \frac{Fe}{2}$ 2) sous-échantillonné à $f_{max} > \frac{Fe}{2}$

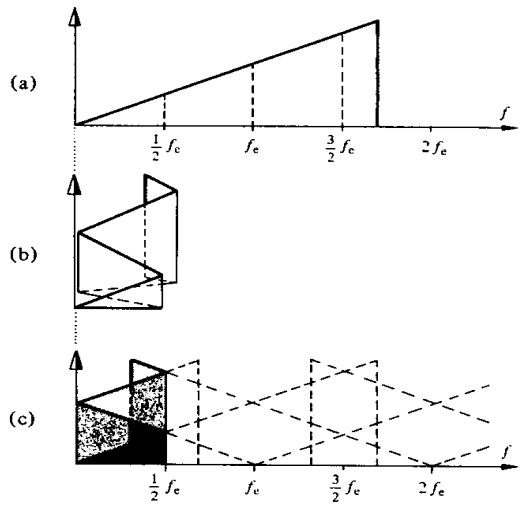
Dans la figure [103], en tenant compte du filtrage de Nyquist à fe/2, on voit (dernière ligne), que les composantes du signal comprises entre fe/2 et fe s'ajoutent au composantes inférieures à fe/2 : il ya **distorsion de recouvrement.** Cependant le recouvrement est faible car f_{max} est comprise entre fe/2 et fe.



(104)

Signal réel (porte) sous échantillonné, filtré à fe/2, et la distorsion qui en résulte

La figure [104] montre l'effet du recouvrement spectral et du filtrage de Nyquist sur la représentation temporelle du signal, en l'occurrence une fonction porte.



(105)

a) Signal initial sous-échantillonné: $f_s > \frac{3fe}{2}$
b) Repliement de spectre qui en résulte
c) filtrage passe-bas idéal à fe/2 (Nyquist)

Dans la figure [105] , le spectre s'étend jusqu'à plus de 3fe/2. Le recouvrement spectral, et donc la distorsion, est beaucoup plus important.

8.6 Echantillonnage réel

En pratique on ne peut pas échantillonner instantanément un signal. Si cela était vrai, il suffirait de choisir une fréquence infiniment élevée pour avoir un signal numérique équivalent au signal analogique. Mais la quantité d'échantillons nécessiterait un espace mémoire gigantesque. Il faut donc choisir une valeur à donner au signal analogique pendant une période d'échantillonnage réaliste et réalisable.

Parmi les **systèmes d'échantillonnage** réels, deux sont plus connus : l'échantillonneur **bloqueur** où la valeur du signal est mémorisée pendant une période qui sert à son échantillonnage (ou **numérisation**), et l'autre où c'est la valeur moyenne du signal qui est retenue et numérisée pendant la période d'échantillonnage.

8.6.1 Echantillonneur bloqueur

Un circuit suit instantanément les variations du signal d'entrée. A l'instant d'échantillonnage, ce circuit est isolé du signal par l'ouverture (**blocage ou maintien ou "Hold "**) d'un "interrupteur" et la valeur qu'il conserve en mémoire est alors convertie numériquement. En pratique, la partie interrupteur est constituée d'un montage à amplis opérationnels et **FET**, et la partie mémorisation d'un **condensateur**. La valeur présente sur le condensateur est alors convertie par un montage **CAN** (conversion analogique-numérique) pendant le **temps de conversion** t_{CAN}. Puis l'interrupteur se ferme et le condensateur est remis en contact avec le signal d'entrée pendant le **temps d'échantillonnage** τ (sample), ou de mémorisation.

En final on a la relation $Te = \tau + t_{CAN}$.

On peut écrire la **représentation temporelle complète** du signal échantillonné sous la forme d'un suite de fonctions Porte d'amplitude égale aux échantillons du signal :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e).\prod_{\tau}(t - kT_e) \tag{106}$$

$$= [s(t).Sha_{Te}(t)] * \prod_{\tau}(t) \tag{107}$$

car la convolution d'une porte (ou autre fonction) par un Dirac retardé est égal à cette porte retardée, et réciproquement.

Si l'on passe dans le domaine spectral, la représentation complète du signal échantillonné s'écrit :

$$S_e(f) = [S(f) * (f_e.Sha_{fe}(f))].F(\prod_{\tau}(t)) \tag{108}$$

$$= \tau f_e.sinc(\tau f).[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f) * \delta(f - kf_e) \tag{109}$$

$$\boxed{S_e(f) = \tau f_e.sinc(\tau f).\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kf_e)} \tag{110}$$

Lorsqu'on filtre par un passe-bas idéal à fe/2, on obtient comme expression du **spectre de base du signal échantillonné** :

$$\boxed{S_{e_0}(f) = \tau f_e.sinc(\tau f)} \tag{111}$$

Ainsi, après filtrage de Nyquist à $fe/2$, on voit que le spectre initial est modulé par la fonction $sinc(\tau f)$.Lorsque la porte d'échantillonnage est étroite, donc le temps d'échantillonnage (et non la période d'échantillonnage du système !) est faible, la distorsion reste faible :

Exemple : fe = 20kHz ($Te = 50\mu s$), $\tau = 5\mu s$ = durée de la porte, donc un rapport de 10%, la distorsion sur l'amplitude du spectre à la fréquence de 1kHz est de 2%.

8.6.2 Echantillonneur moyenneur

Contrairement à l'échantillonneur-bloqueur, on ne retient plus ici une valeur instantanée du signal pendant un intervalle τ, mais on prend sa **valeur moyenne pendant la même période τ centrée** sur l'instant kTe d'échantillonnage (en pratique la valeur moyenne est calculée sur les valeurs passées donc est prise plutôt **avant** l'instant d'échantillonnage). Ceci est strictement équivalent à multiplier

le signal pendant une valeur τ par une porte de largeur τ retardée de kTe. Ainsi la valeur du signal échantillonné vaut, **au temps kTe** :

$$s_e(kTe) = \frac{1}{\tau}\int_{kTe-\tau/2}^{kTe+\tau/2} s(t)dt \tag{112}$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_{kTe-\tau/2}^{kTe+\tau/2} \prod_{\tau}(t-kTe).s(t)dt \tag{113}$$

$$= \frac{1}{\tau}[\prod_{\tau}(t) * s(t)].\delta(t-kTe) \tag{114}$$

donc, la **représentation temporelle complète** du signal échantillonné s'écrit

$$s_e(t) = \frac{1}{\tau}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[\prod_{\tau}(t) * s(t)].\delta(t-kTe) \tag{115}$$

ce qui s'écrit dans le domaine spectral :

$$S_e(f) = f_e\,.\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{\,[\,sinc(\tau f).S(f)] * \delta(t-kfe)\,\} \tag{116}$$

$$\boxed{S_e(f) = f_e\,.\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[\,sinc(\tau(f-kfe)).S(f-kfe)\,]} \tag{117}$$

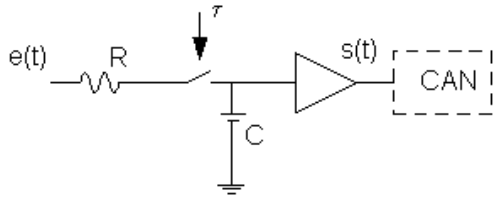
donc après un filtrage de Nyquist à fe/2, on obtient pour le **spectre de base du signal échantillonné** une expression équivalente à celle de l'échantillonneur-bloqueur (le paramètre τ a été supprimé dans le calcul avec la valeur moyenne).

$$\boxed{S_{e_0}(f) = f_e.sinc(\tau f).S(f)} \tag{118}$$

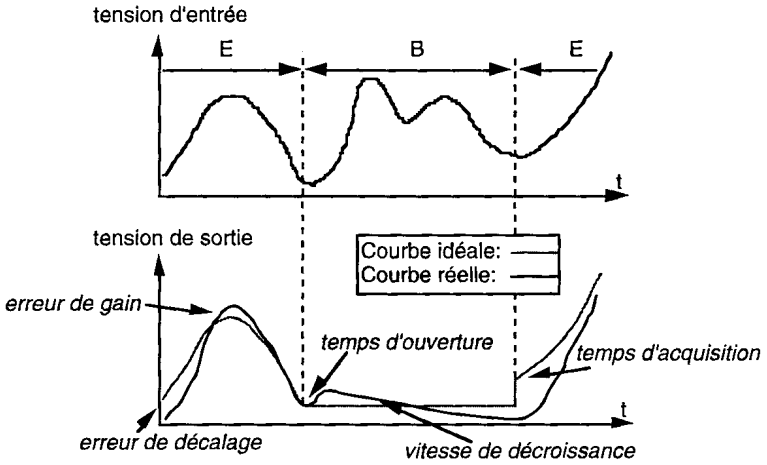
- Conclusion : l'échantillonnage réel introduit, par "**découpage en impulsions rectangulaires**" du signal analogique, une modification du spectre de celui-ci par **modulation avec une fonction sinus cardinal**.

8.6.3 Autres paramètres de l'échantillonnage réel

- Ceci est encore une vision lointaine des modifications que subit le signal analogique avant d'être numérisé. Les figures ci-dessous montrent le schéma d'un échantillonneur-bloqueur et les erreurs induites lors d'un cycle d'échantillonnage(E)-blocage(B), en particulier les erreurs dues au retard de l'interrupteur et à la distorsion de l'amplificateur d'isolement à grande impédance d'entrée (Ze ->∞). Ces erreurs ne seront pas traitées dans le cadre de ce cours.



Echantillonneur bloqueur (Sample/Hold) (119)



Caractéristiques réelles d'un échantillonneur-bloqueur (120)

8.7 Conversion

8.7.1 Quantification

8.7.2 Loi de compression et codage

8.8 Restitution du signal

8.8.1 Interpolation idéale de Shannon

8.8.2 Suréchantillonnage

9 Corrélation

En traitement du signal, une opération particulièrement utile est de pouvoir **comparer** deux signaux. Plusieurs méthodes permettent de réaliser cette comparaison : la distance euclidienne, le produit scalaire, la corrélation. Nous allons nous intéresser plus particulièrement au produit scalaire et à son extension : la corrélation.

Citons déjà quelques-unes des applications de la corrélation :

- extraction d'un signal noyé dans du bruit (électronique médicale)
- mesure de retard apporté par le canal de propagation (transmission Hertzienne, fibre optique etc.)
- réduction de bruit
- quantification des caractéristiques dynamiques des systèmes linéaires.
- détection et extraction d'un signal périodique noyé dans du bruit.
- détection de la périodicité.

9.1 Intercorrélation temporelle

Nous savons que le produit scalaire de deux vecteurs est proportionnel à la projection d'un vecteur sur l'autre. Pour deux vecteurs de norme donnée, ce produit est maximum lorsque les deux vecteurs ont la même orientation. Il faut considérer le produit scalaire comme une mesure de similitude de l'orientation des vecteurs. On obtient la valeur maximum du produit scalaire lorsque l'angle θ entre les deux vecteurs est minimal.

Par analogie avec le produit scalaire de deux vecteurs, le produit scalaire de deux fonctions permet de quantifier la **similitude de leur forme et de leur position**. Ce **produit scalaire** est défini (lorsque les fonctions sont complexes) par :

$$\langle x^*, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).y(t)dt \tag{121}$$

où $x^*(t)$ est le complexe conjugué de $x(t)$.

9.1.1 Définition de l'intercorrélation temporelle

Comme pour les vecteurs, on peut rechercher la similitude maximale entre deux signaux en introduisant la notion de **corrélation**. Il s'agit simplement d'ajouter au produit scalaire des signaux un paramètre τ de position qui permet de déplacer un signal par rapport à l'autre (de le faire glisser devant l'autre). Le paramètre τ est équivalent à l'angle θ entre deux vecteurs.

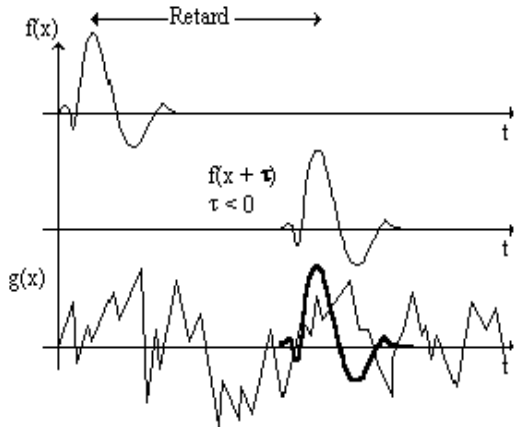
$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau) = \langle x^*, y_\tau\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).y(t+\tau)dt} \tag{122}$$

On trouve aussi la définition avec "$y(t-\tau)$" qui est strictement équivalente.

Définition *Le produit scalaire de x^* avec y_τ (y décalé de τ), tel que défini par [122] est appelé fonction d'intercorrélation des signaux à énergie finie (signaux transitoires déterministes ou aléatoires dont l'énergie finie).* Voir la définition plus loin pour les signaux à puissance finie.

La fonction d'intercorrélation **traduit l'évolution de la similitude en fonction du paramètre de translation τ**.

En particulier, pour les valeurs de τ où la fonction d'intercorrélation s'annule, on dit que les signaux sont **orthogonaux** ou **non corrélés**.



(123)

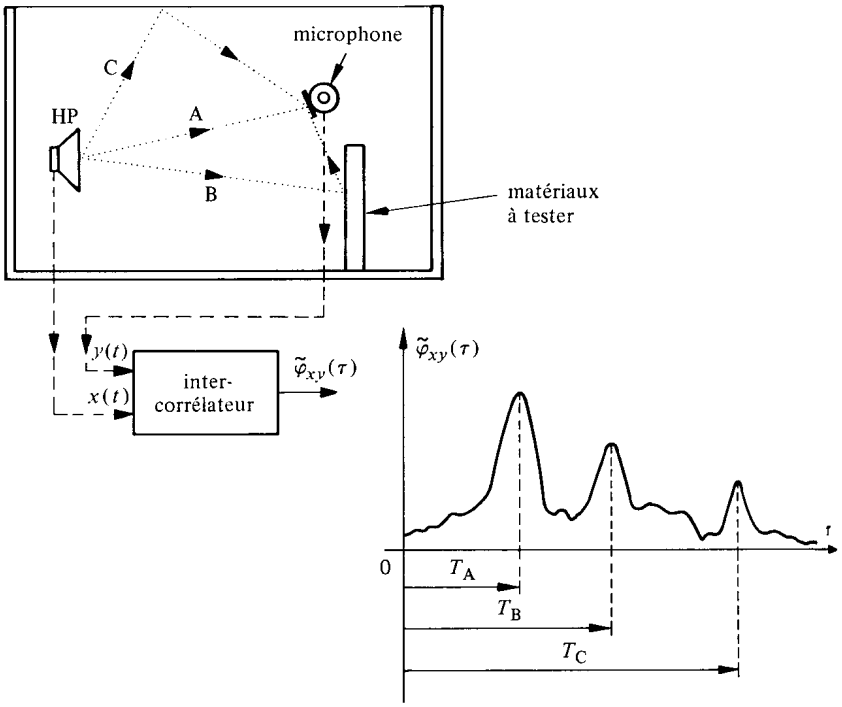
La figure [123] représente la corrélation d'un signal f(x) et du même signal additionné d'un bruit de fond : g(x). L'intercorrélation des deux signaux est maximale pour un retard sur f(x) de τ (avec $\tau < 0$), et permet de déterminer quel retard subit le signal qui traverse ce système bruité.

Définition *On définit aussi avec [124] une fonction d'intercorrélation pour les signaux à puissance moyenne finie (signaux périodiques ou aléatoires permanents).* De plus, lorsque la période du signal est constante, de valeur T, l'expression sous forme de limite n'est plus nécessaire.

$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau) = \langle x^*, y_\tau \rangle = \lim_{T->\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^*(t).y(t+\tau)dt} \quad (124)$$

- Exemple d'expérience de corrélation :

L'intercorrélation du signal d'entrée du haut-parleur et du signal de sortie du microphone permet de mettre en évidence les différents chemins de propagation A, B et C, et de mesurer leurs coefficients d'absorption (incluant l'absorption en réflexion sur les matériaux et l'atténuation sur les chemins parcourus.



(125)

- Intercorrélation dans une mesure acoustique -

9.1.2 Comparaison entre convolution et corrélation

On notera la similitude entre la **convolution** et la **corrélation**; le changement de variable $t\prime = -t$ dans la relation de convolution conduit à la relation de corrélation, mais le résultat est **très différent** lorsque les signaux sont **asymétriques**. C'est ce que montre la figure ci-dessous, où l'on prendra soin de noter que les deux signaux sont des exponentielles décroissantes relativement similaires.

On notera tout d'abord la construction graphique de la corrélation :

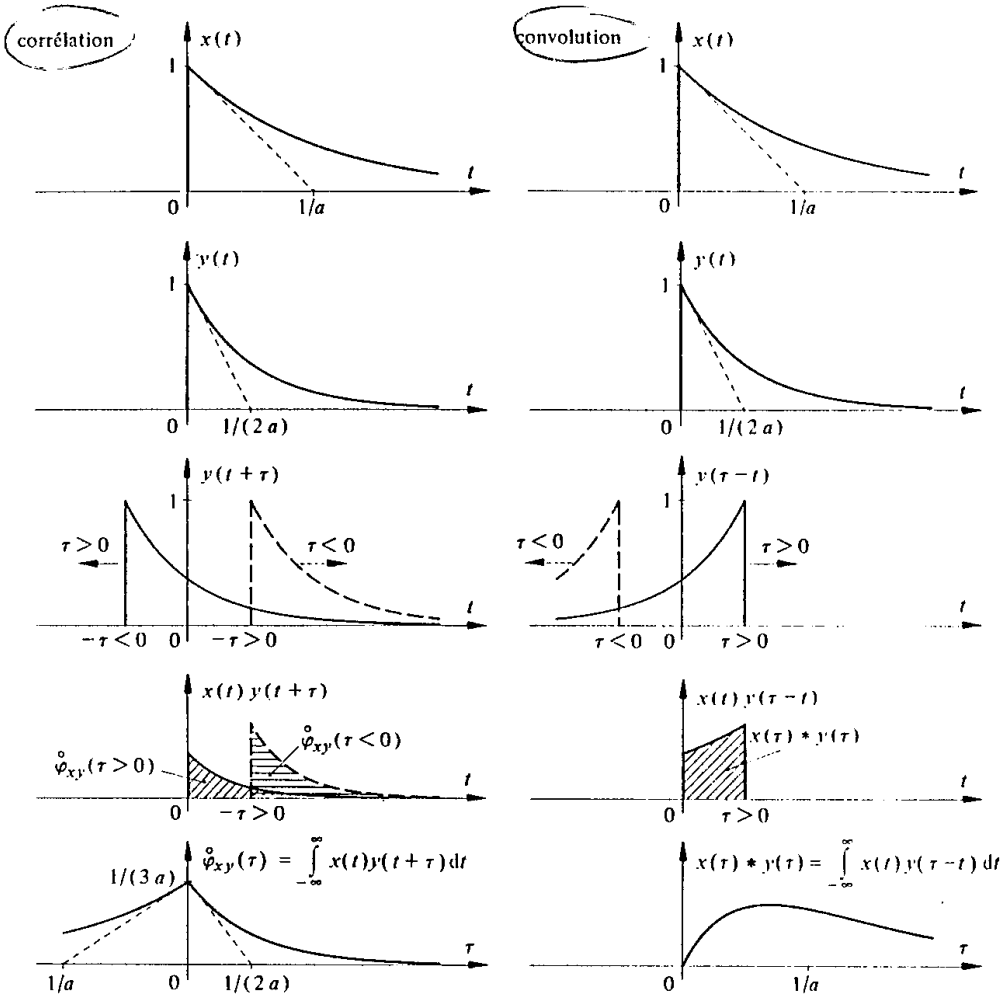
1) On trace d'abord la partie négative de la fonction de corrélation, donc pour $\tau < 0$. Dans ce cas y(t) est déplacé vers la droite depuis sa position d'origine et comparé à x(t). L'aire de y(t) est entièrement multipliée avec celle de x(t) tout le long du déplacement. La décroissance du produit des aires se fait donc selon la décroissance de x(t). On retrouve donc tout normalement cette décroissance dans le résultat final, la partie négative de la fonction d'autocorrélation.

2) Pour la partie positive, donc $\tau > 0$, y(t) est déplacé de sa position d'origine vers la gauche et multiplié avec l'aire complète de x(t). La décroissance suit donc cette fois celle de la fonction y(t), ce que l'on retrouve dans la partie positive de la fonction de corrélation.

En conclusion, la similitude entre les deux fonctions décroit plus lentement lorsque y(t)est déplacée vers la droite.

En ce qui concerne la convolution, on retrouve un résultat qui peut se déduire de la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas (proche de y(t)) convoluée avec le signal x(t), que l'on rapprochera

d'un échelon avec décroissance exponentielle.



(126)

Comparaison de la corrélation et de la convolution

9.1.3 Autocorrélation d'un signal

Définition *L'autocorrélation d'un signal à énergie finie est définie par* :

$$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).x(t+\tau)dt} \tag{127}$$

En particulier, **la valeur à l'origine de la fonction d'autocorrélation est égale à l'énergie**

du signal.

$$\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, d\tau = W_x \tag{128}$$

9.1.4 Intercorrélation/ autocorrélation de signaux périodiques

Pour deux signaux périodiques réels x(t) et y(t) **de même période $\mathbf{T}_0$**, la fonction d'**intercorrélation** se définit comme

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t).y(t+\tau)dt \tag{129}$$

de même, la fonction d'**autocorrélation** de x se définit comme :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t).x(t+\tau)dt \tag{130}$$

Si l'on considère les développements en série de Fourier de x et $x(t+\tau)$, y et $y(t+\tau)$, on peut écrire pour l'intercorrélation :

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \{ \sum X_n^* \, exp(j2\Pi nt/T_0). \sum Y_n \, exp(j2\Pi n(t+\tau)/T_0) \} dt \tag{131}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum X_n^* Y_n \, [exp(j2\Pi n\tau/T_0)\,].\underbrace{[\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} exp(j2\Pi nt/T_0)]}_{=\delta_n=1} \tag{132}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n^* \, Y_n \, exp(j2\Pi n\tau/T_0) \tag{133}$$

et de même pour l'autocorrélation :

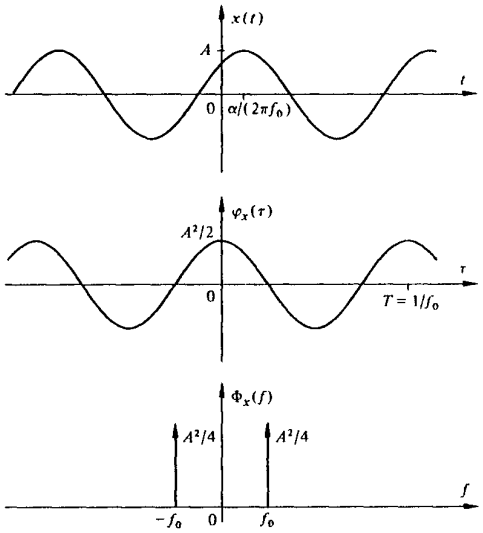
$$\varphi_{xx}(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n^* \, X_n \, exp(j2\Pi n\tau/T_0) \tag{134}$$

$$= X_0^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} X_n^* \, X_n \, cos(j2\Pi n\tau/T_0) \tag{135}$$

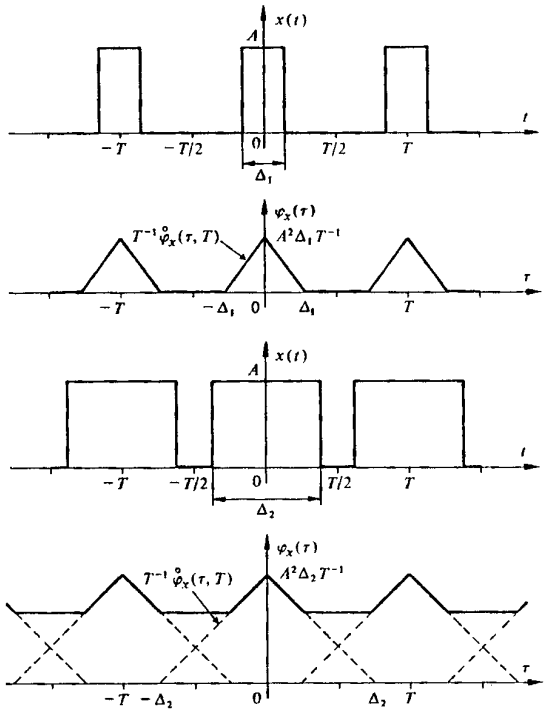
ou encore, en posant $a_0 = X_0$ et $X_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

$$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).cos\, n\omega_0\tau} \tag{136}$$

Conclusion *Les* ***fonctions d'inter et d'autocorrélation conservent l'information de fréquence*** *mais pas celle de phase. Ceci signifie que la corrélation de signaux de même période équivaut à la corrélation des motifs élémentaires, répétée de la période du signal (fig.)*



Autocorrélation d'un sinus



()

Autocorrélation d'un rectangle périodique
a et b) $\Delta 1 < T/2$
c et d) $T/2 < \Delta 2 < T$

9.1.5 Détection d'un signal noyé dans le bruit

La détection de signaux noyés dans le bruit nécessite l'hypothèse d'un **bruit blanc** dont la **fonction d'autocorrélation** $\varphi_{bb}(\tau)$ **est une impulsion de Dirac**, autrement dit est nulle partout sauf en 0. Si l'on prend par exemple l'hypothèse d'un bruit **thermique**, de densité spectrale de puissance constante $B(f) = B_0 = \frac{1}{2}kT$, on a :

$$\varphi_{bb}(\tau) = B_0.\delta(\tau) \tag{137}$$

Soit un signal réel donné par la somme $s(t) = x(t) + b(t)$, où x(t) est un signal déterministe et b(t) un bruit blanc, donc de fonction d'autocorrélation nulle sauf en 0, et **indépendant** du signal x(t).

La fonction d'autocorrélation du signal s(t) est donnée par :

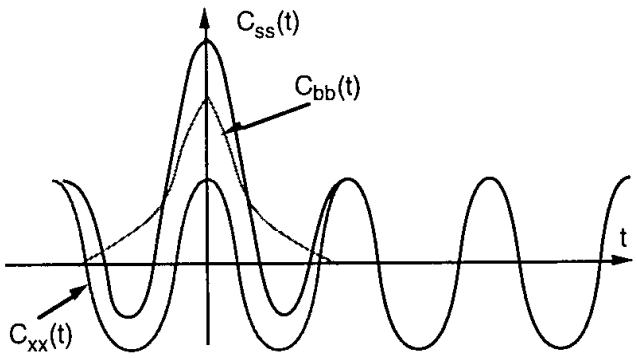
$$\begin{aligned}\varphi_{ss}(\tau) &= \int s(t).s(t+\tau)dt \\ &= \int [x(t)+b(t)].[x(t+\tau)+b(t+\tau)]dt \\ &= \varphi_{xx}(\tau) + \varphi_{xb}(\tau) + \varphi_{bx}(\tau) + \varphi_{bb}(\tau) \end{aligned} \tag{138}$$

Comme les fonctions $\varphi_{xb}(\tau)$ et $\varphi_{bx}(\tau)$ sont nulles puisque signal et bruit sont supposés indépendants, et que $\varphi_{bb}(\tau) = 0$, alors on peut écrire :

$$\varphi_{ss}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) \tag{139}$$

Ainsi l'autocorrélation d'un signal noyé dans un bruit blanc permet de détecter la présence de ce signal. Connaissant la fonction d'autocorrélation, nous connaissons donc le **spectre de puissance**. En revanche nous **n'avons pas l'information de phase**, donc le signal d'origine **n'est pas reconstructible**.

Remarque : Lorsque le bruit est un bruit rose, sa puissance spectrale n'est pas constante et sa fonction d'autocorrélation, centrée sur 0, est néanmoins rapidement décroissante (voir fig.140, détection du signal dans un bruit rose).



(140)

Autocorrélation d'un signal noyé dans du bruit rose

9.1.6 Densité spectrale d'énergie

Définition *La Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est appelée densité spectrale d'énergie (DSE) et notée* $\overset{o}{\Phi}_x(\nu)$

$$\boxed{DSE(x) = \overset{o}{\Phi}_x(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(\tau).e^{-j2\Pi\nu\tau}d\tau} \tag{141}$$

On en déduit par **transformée de Fourier inverse** que :

$$\boxed{\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{o}{\Phi}_x(\nu).e^{j2\Pi\nu\tau} d\tau} \tag{142}$$

On remarquera alors que pour $\tau = 0$, on a les relations :

$$\begin{cases} \varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\nu)|^2\, d\nu \\ \varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{o}{\Phi}_x(\nu).d\nu \end{cases} \tag{143}$$

qui sont une forme particulière de l'**identité de Parseval** et montrent que **toute l'énergie du signal est contenue dans la DSE.** Elle rappelle que l'énergie totale du signal peut se calculer **soit en intégrant sa distribution temporelle, soit en intégrant sa distribution fréquentielle**. On peut aussi noter que la **DSE caractérise le spectre d'énergie** indépendamment de la phase puisqu'elle n'utilise que l'information de module du signal. Elle caractérise donc le signal indépendamment de toute translation de ce signal (cf. T.F., théorème du retard).

On en déduit de [143]:

$$\boxed{DSE = \overset{o}{\Phi}_x(\nu) = |x(\nu)|^2} \tag{144}$$

La densité spectrale d'énergie décrit la **répartition spectrale de l'énergie du signal**.

9.1.7 Densité spectrale de puissance

Définition *Pour un signal à puissance moyenne finie, on définit aussi une* ***densité spectrale de puissance****, qui est égale à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal à puissance moyenne finie (voir [124]) et notée* $\Phi_x(\nu)$:

$$\boxed{DSP(x) = \Phi_x(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(\tau).e^{-j2\Pi\nu\tau} d\tau} \tag{145}$$

Pour les signaux à puissance moyenne finie, ou énergie infinie, le carré du module de la transformée de Fourier prend donc une valeur infinie pour $T- > \infty$. On adopte alors un passage par la représentation à la limite :

$$\boxed{DSP = \Phi_x(\nu) = \lim_{T->\infty} \frac{1}{T}\, |x(\nu)|^2} \tag{146}$$

- **Théorème de Wiener-Kintchine**

La Densité Spectrale est égale à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation.

On note que ce résultat permet d'utiliser la **même définition de la densité spectrale pour les signaux à puissance et à énergie finie, déterministes et aléatoires.**

9.2 Intercorrélation statistique

L'intercorrélation temporelle permet de traiter la corrélation de façon continue. Les signaux peuvent aussi être considérés comme une suite d'**échantillons** auxquels on associe une **variable aléatoire** possédant une **densité de probabilité.** La corrélation peut alors être définie sous un aspect statistique. Voir pour cette partie le polycopié de R.Reynaud.

10 Modulation

10.1 Transformation du signal

- Difficulté de la transmission d'un signal

- Premier exemple : supposons que l'on veuille transmettre un signal audible, sans transposition de fréquence, par voie radioélectrique. Il faudrait une antenne de dimension équivalente à la longueur d'onde du signal soit 1km pour transmettre un signal à 300Hz. De plus tous les signaux audibles transmis par différents émetteurs se mélangeraient à la réception. Ceci rend impossible la transmission du signal à sa fréquence de base.

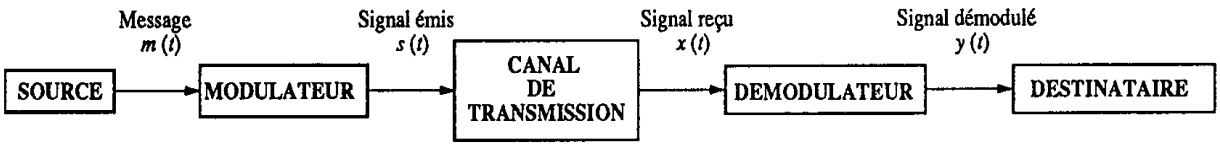
- Autre exemple : sur les liaisons Hertziennes, à très longue distance, il faut utiliser soit **la réflexion sur les couches atmosphériques ou ionosphériques**, soit **la transmission à travers les mêmes couches** vers des satellites. La réflexion sur, ou la transmission à travers ces couches est réalisée selon que la fréquence du signal est plus ou moins élevée. Plus la fréquence est élevée, plus le signal traverse facilement les hautes couches de l'atmosphère. Dans les deux cas, réflexion ou transmission, la fréquence du signal doit être supérieure à quelques dizaines de megaHertz (bande décamétrique des transmissions ionosphériques) jusqu'à atteindre quelques gigaHertz (transmission vers les satellites).

De plus la transmission d'un signal à des fréquences élevées offre un plus grand **éventail de canaux** de transmission, donc **moins de risque d'interférences**

- Enfin les **caractéristiques physiques du support de transmission**, physique (câble, fibre optique), ou aérien (propagation Hertzienne libre), qui font que ce support joue le rôle de filtre vis-à-vis du signal, requièrent aussi une transposition de fréquence du signal. En effet le signal, pour pouvoir être transmis, doit être **adapté à la bande passante du filtre passe-bas** ou **passe-bande** (condensateurs et inductances équivalentes de la ligne électrique, optique ou de l'air) que représente le **canal de propagation**. La notion de **bande passante du canal** de transmission est introduite.

- Transposition de fréquence

Ainsi, afin d'être transmis plus facilement, un signal doit donc souvent être **transposé**, ou **translaté**, dans une **bande supérieure** autour d'une fréquence dite "**porteuse**". Une des fonctions principales de la modulation est de **changer la localisation spectrale** du signal d'origine. On donne alors au signal d'origine, non transposé, l'appellation de **signal en bande de base**.



Exemple d'une chaîne de transmission par modulation

(147)

Pour être transmis sur de longues distances, le signal modulé devra être émis à **forte puissance**. En revanche à une puissance équivalente, nous verrons que certaines modulations (MF) sont beaucoup moins sujettes aux **interférences** et à l'**atténuation**.

Nous allons étudier deux des méthodes les plus classiques de transposition et de **modulation analogique** des signaux : **la modulation d'amplitude et la modulation de fréquence**. Quelques **modulations numériques** seront juste citées et définies mais non étudiées.

Il existe en fait de très nombreux types de modulations différents. Ces modulations présentent toutes des caractéristiques et des avantages et inconvénients différents. Citons, parmi ceux-ci, la simplicité et le coût de la réalisation (modulation, synchronisation etc.), l'occupation de bande, l'insensibilité aux interférences, le rapport signal à bruit, la facilité d'émettre à forte puissance.

- Domaines d'application de la modulation

Les télécommunications (téléphonie, radiophonie, télévision, télémesure et télécommande, modem pour transmission de données), les systèmes de détection (radar, sonar), mais aussi l'instrumentation et la métrologie où on utilise la transposition de fréquence pour faciliter le traitement du signal.

10.2 Modulation ou transposition de fréquence

Une modulation analogique consiste en la transposition de fréquence d'un signal d'information, ou signal modulant, à l'aide d'un **signal porteur, ou porteuse.**

Ce signal peut être soit **une porteuse sinusoïdale (modulation continue)**, soit une **suite périodique d'impulsions (modulation par impulsions)**. Nous allons nous intéresser tout d'abord aux modulations continues que sont les **modulations d'amplitude de fréquence et de phase**.

- Porteuse sinusoïdale et **signal à bande étroite**

Lorsque la bande du signal modulant est faible par rapport à la fréquence porteuse, on peut adopter pour le signal modulé une hypothèse dite de **bande étroite.** Dans cette hypothèse, on fait abstraction de la position du signal modulé sur l'axe des fréquences, et le signal modulé haute fréquence est alors assimilé à un signal **quasi-monochromatique**. La représentation en **bande de base** d'un signal à bande étroite est ainsi décrite par la relation suivante :

$$\boxed{s(t) = a(t)\, cos\,(\underbrace{2\Pi f_p t + \varphi(t)}_{\Phi_i(t)\ :\ phase\ instantanée})} \tag{148}$$

où $a(t)$ et $\varphi(t)$ sont l'amplitude et la phase du signal modulant $m(t)$, et f_p est la **fréquence porteuse.** Cette représentation est la plus simple pour un signal modulé. Dans ce cas on peut donner l'expression de la fréquence instantanée :

$$\boxed{F_i(t) = \frac{\omega_i}{2\Pi} = \frac{1}{2\Pi}\frac{d\Phi_i(t)}{dt} = f_p + \frac{1}{2\Pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}} \tag{149}$$

10.3 Modulations linéaires : la modulation d'amplitude

L'opération fondamentale utilisée dans toute **modulation linéaire** est la **multiplication** d'un signal, ou d'une fonction de ce signal, par une **porteuse**.

10.3.1 Modulation d'amplitude sans porteuse

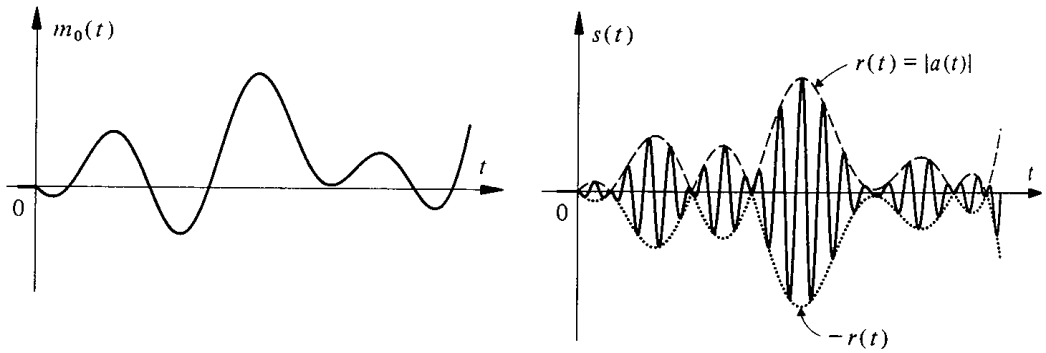
Pour effectuer une translation dans le domaine spectral, il suffit de réaliser une **convolution du signal par un Dirac translaté**. Cette opération est réalisée dans le domaine temporel par une **simple multiplication du signal avec une sinusoïde pure**, ou **porteuse**, de fréquence f_p. Le spectre obtenu est donc celui du signal modulant décalé de $+f_p$ et $-f_p$. Nous allons voir aussi que la porteuse n'est pas transmise par cette opération.

- **Expression du signal modulé en DBSP**

Cette modulation, aussi appelée **DBSP** (double bande sans porteuse) ou encore **AM-P** (ou DS-BSC, double sided band suppressed carrier) est représentée par la relation de base suivante :

$$\boxed{s(t) = m(t) \times p(t) = m(t) \times A_p \, cos \, 2\Pi f_p t} \tag{150}$$

où s(t) est le signal modulé résultant, m(t) le signal d'origine ou signal modulant, p(t) la porteuse d'amplitude A_p et de fréquence f_p.



(151)

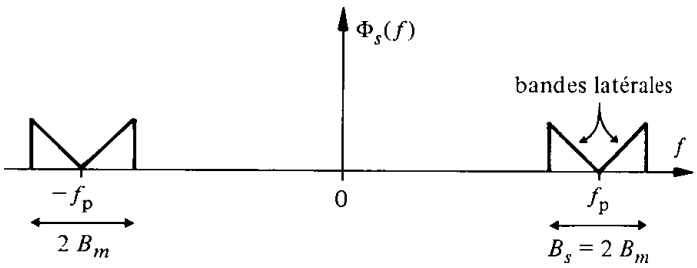
Modulation DBSP (AM-P) : signal modulant et signal modulé

- **Spectre du signal DBSP**

La transformée de Fourier d'un signal modulé en DBSP s'écrit :

$$\boxed{S(f) = \frac{A_p}{2} \times [M(f+f_p) + M(f-f_p)]} \tag{152}$$

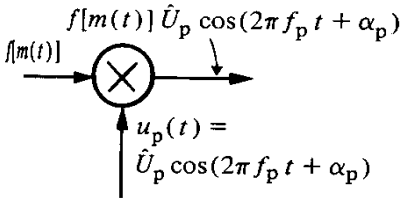
Ce qui montre que la bande spectrale occupée est $B = 2f_m$, et que **la fréquence porteuse n'apparait pas**.



(153)

Spectre de la modulation DBSP (AM-P)

- Génération du signal DBSP



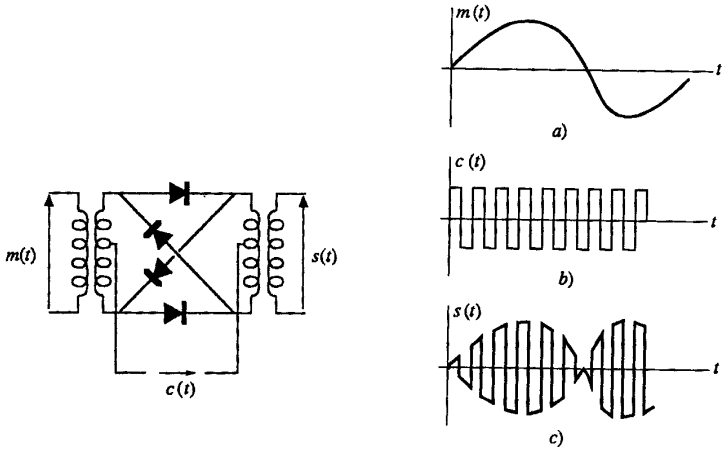
(154)

Schéma de la modulation DBSP : avec multiplieur

Réalisation :

1) La multiplication du signal modulant par un signal rectangulaire, dont la décomposition en série de Fourier comporte une sinusoïde à la fréquence fondamentale $f_0$du signal rectangulaire, suffit à réaliser la modulation. Les fréquences supérieures de la décomposition sont éliminées par filtrage passe-bas à $\pm f_0$.

2) Si l'on considère que multiplier le signal modulant par un signal rectangulaire équivaut à l'inverser au rythme de cette porteuse rectangulaire, alors on peut utiliser le dispositif à diodes appelé **modulateur en anneau** ou "**mélangeur à diodes**". Ce n'est pas un vrai multiplieur, mais un **inverseur** du signal modulant **au rythme de la porteuse** qui commande l'ouverture des diodes.



(155)

Modulation DBSP (AM-P): Modulateur en anneau

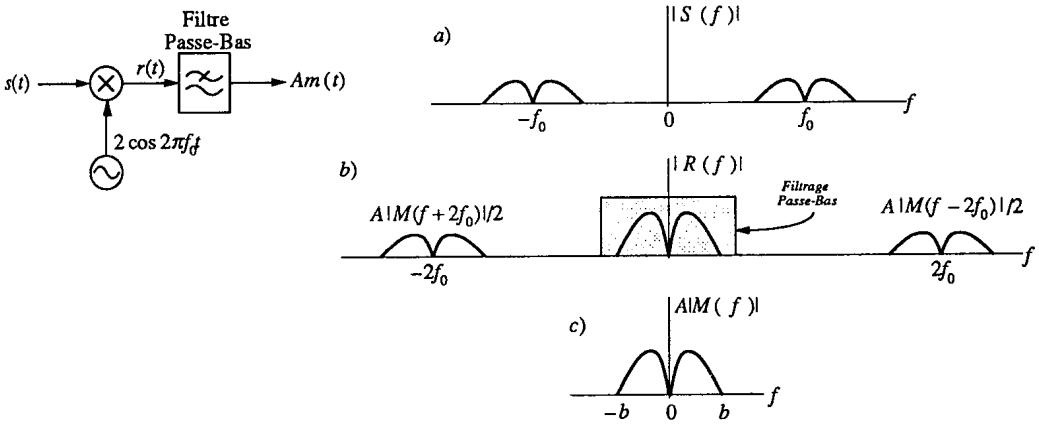
- Démodulation du signal DBSP

La démodulation du signal DBSM se fait selon le même principe que sa modulation : par **multiplication** du signal reçu avec une **porteuse de même fréquence et de même phase qu'à l'émission**. Ce principe est appelé **démodulation synchrone** ou "**cohérente**"

On peut écrire :

$$m(t).A_p \cos 2\Pi f_p t \times \cos 2\Pi f_p t = A_p m(t) + A_p m(t) \cos 4\Pi f_0 t \tag{156}$$

En éliminant alors par filtrage passe-bas le terme de fréquence $2f_0$, on retrouve l'expression du signal modulant.



(157)

Démodulation DBSP (AM-P) synchrone

- Avantages/inconvénients de la modulation DBSP

S'il n'y a pas une **synchronisation parfaite** en fréquence et phase de la porteuse de réception par rapport à celle d'émission, il y a risque d'atténuation du signal par un terme de déphasage. Cette difficulté de synchronisation entre les oscillateurs d'émission et de réception fait de la démodulation cohérente, nécessaire en DBSP, une méthode de modulation plus exigente que la modulation avec porteuse ou DBAP (ou AM).

En revanche, ne pas transmettre la porteuse permet un gain de puissance à l'émission.

10.3.2 Modulation d'amplitude avec porteuse

Dans la modulation d'amplitude **DBAP** (double bande avec porteuse) ou **AM** (amplitude modulation), qui est la modulation d'amplitude la plus commune, la porteuse est transmise en plus du signal modulé du type DBSP vu précédemment.

- Expression du signal modulé en DBAP

$$\boxed{s(t) = (1 + k_a.\, m(t))\, .A_p cos\, 2\Pi f_p t} \tag{158}$$

où k_a est un facteur dépendant du modulateur (que l'on n'avait pas introduit pour la modulation DBSP), et $\mathbf{k_a.m(t)}$ est la **déviation instantanée d'amplitude**.

- Lorsque le **signal modulant est sinusoïdal**, on peut s'écrire

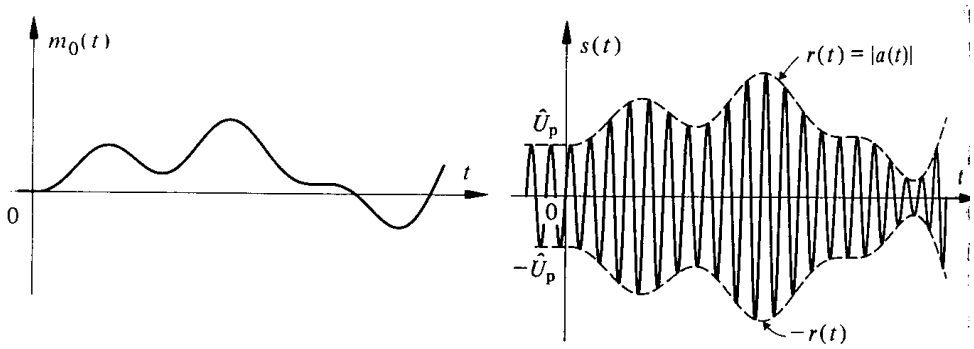
$$m(t) = A_m cos\, 2\Pi f_m t \tag{159}$$

Il est alors possible de donner l'expression de **l'indice de modulation** α sous la forme suivante :

$$\boxed{\alpha = k_a.A_m/A_p} \tag{160}$$

Definition 1 *L'indice de modulation α est le rapport de la déviation maximale d'amplitude $k_a.A_m$ du signal modulant à l'amplitude de la porteuse.*

L'**enveloppe** du signal modulé DBAP **ne s'annule jamais**, contrairement au signal DBSP, si l'on prend soin de respecter la condition suivante : $-1 < k_a.m(t) < 1$. De plus l'enveloppe du signal modulé suit le signal modulant ce qui facilite la démodulation.



(161)

Modulation DBAP (AM) : signal modulant et porteuse modulée

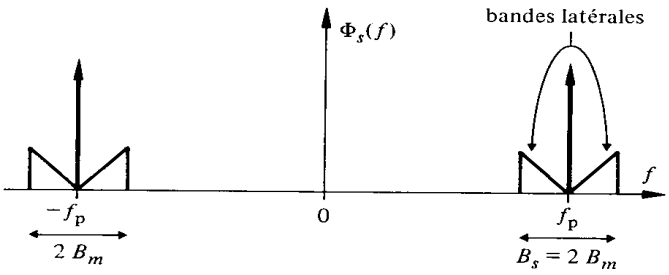
- Spectre du signal DBAP (AM)

La transformée de Fourier du signal modulé en DBAP est :

$$\boxed{S_{AM}(f) = \frac{\alpha.A_p}{2}[M(f+f_p) + M(f-f_p)] + \frac{A_p}{2}[\delta(f+f_p) + \delta(f-f_p)]} \quad (162)$$

Le spectre du signal DBAP est ainsi constitué du la superposition du spectre du signal DBSP et d'une raie à la fréquence porteuse.

ce qui montre que l'occupation spectrale est, comme pour le DBSP, $\boxed{B = 2f_m}$



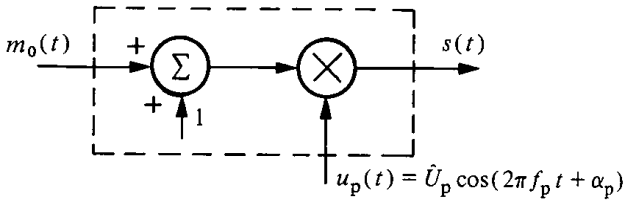
(163)

Spectre de la modulation DBAP (AM)
C'est le spectre de la DBSP avec la porteuse en plus (fp)

- Génération des signaux DBAP

Dans la modulation DBAP, la multiplication peut être réalisée soit **directement** au moyen d'un **circuit multiplicateur** de signaux analogiques, soit **indirectement** en effectuant une sommation du signal modulant et de la porteuse à l'entrée d'un **élément non linéaire**.

- – Modulation par sommateur/multiplieur



(164)

Modulation DBAP (AM) : schéma avec sommateur et multiplieur

Note : Un principe du multiplieur est d'utiliser le schéma de l'**amplificateur logarithmique**. La somme de deux logarithmes équivaut au logarithme de la somme. Associé à un amplificateur d'**anti-logarithme** (ou exponentiel), on obtient ainsi l'opérateur de multiplication.

- – Le principe de la modulation linéaire par **élément non-linéaire** s'explique simplement lorsqu'on prend l'exemple d'une transformation pour cet élément (ici un **modulateur quadratique**) :

$$g(t) = a_1 t + a_2 t^2 \tag{165}$$

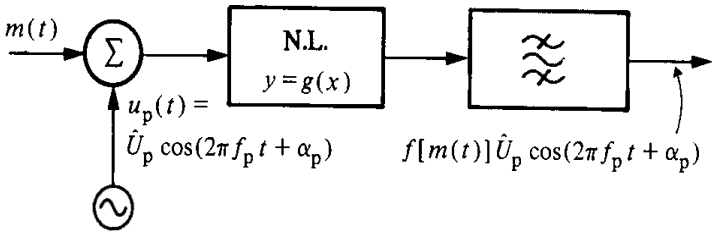
Le signal en sortie de l'élément N.L. s'écrit alors :

$$y(t) = g(m(t) + u_p(t)) \tag{166}$$

$$= a_1(m(t) + p(t)) + a_2[m^2(t) + u_p^2(t) + 2m(t).u_p(t)] \tag{167}$$

L'élément non-linéaire introduit une **multiplication entre les termes de la somme** $\mathbf{m(t) + u_p(t)}$ et crée la modulation.

Un **filtrage** entre $f_0 - b$ et $f_0 + b$ conserve le signal modulé $\{a_1.p(t) + a_2.2m(t).u_p(t)\}$ et élimine les autres termes de basse fréquence.



(168)

Schéma de la modulation linéaire avec élément non-linéaire
(la relation y=g(x) traduit la nature instantanée du transfert)

Réalisation de la modulation par élément non-linéaire :

L'élément non-linéaire peut être un transistor, un amplificateur opérationnel, la capacité non-linéaire d'une diode bloquée ou tout autre élément possédant un transfert non-linéaire. Citons les opérateurs suivants :

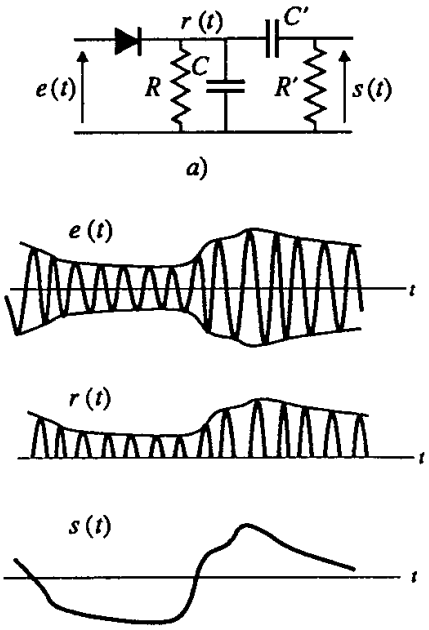
redresseur bipolaire	$y(t) = \|x(t)\|$
comparateur	$y(t) = sgn[x(t) - a]$
opérateurs quadratiques ou de racine carrée	$y(t) = x^2(t)$ ou $y(t) = \sqrt{x(t)}$
opérateur logarithmique	$y(t) = log[x(t)]$
opérateur trigonométrique	$y(t) = sin[x(t)]$

(169)

Quelques opérateurs non-linéaires

- Démodulation des signaux DBAP

Le principe est de récupérer uniquement l'enveloppe du signal modulé dont les variations représentent le signal modulant. Le système de récupération du signal est donc extrêmement simple : une **détection à diode** suivi d'un filtrage dont le schéma est illustré par la figure [170].



(170)

Démodulateur DBAP par **détection d'enveloppe à diode**
+ filtre d'élimination de porteuse

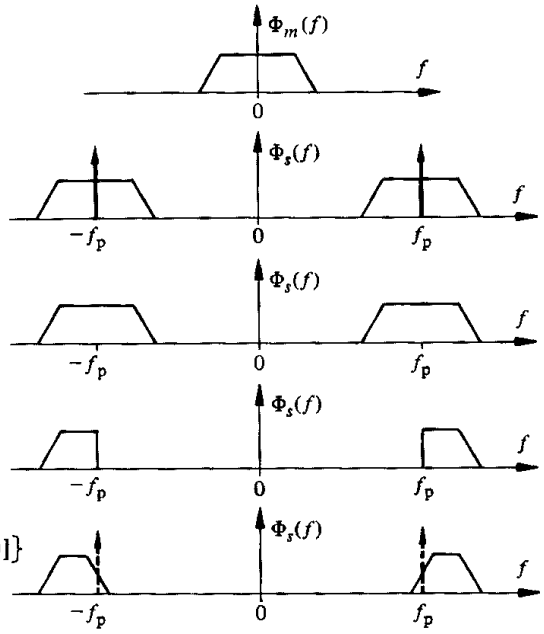
- Avantages/inconvénients de la modulation AM

En AM, une partie de la puissance est perdue dans la transmission de la porteuse. En revanche la modulation et la détection sont des opérations extrêmement simples et peu coûteuses.

10.3.3 Table résumée des modulations d'amplitude

En plus des modulations d'amplitude avec porteuse (AM) et sans porteuse (AM-P), on trouve aussi une modulation d'amplitude **BLU à bande latérale unique (SSB = single side band)** et une modulation **BLR à bande latérale résiduelle (VSB = vestigial side band)**. Ces deux modulations permettent de transmettre la même information en occupant encore moins de largeur de bande. Comme on le voit sur la figure [171], la modulation BLU à bande latérale unique est l'équivalent d'une modulation AM-P où l'on ne transmet que la moitié du spectre utile (l'autre étant la symétrique) en effectuant un filtrage passe-bas approprié. Ce filtrage s'avérant quelquefois difficile, on a créé une modulation BLR à bande latérale résiduelle, compromis de modulation AM et AM-P et dont la largeur de bande est inférieure à ces deux modulations.

Signal modulant	$m(t) = U_m \cdot m_0(t)$
AM	$\underset{\sim}{r}(t) = \hat{U}_p[1 + m_0(t)]$
AM-P	$\underset{\sim}{r}(t) = \hat{U}_p \cdot m_0(t)$
SSB	$\underset{\sim}{r}(t) = \frac{\hat{U}_p}{2}[m_0(t) + j\check{m}_0(t)]$
VSB	$\underset{\sim}{r}(t) = \frac{\hat{U}_p}{2}\{(1) + m_0(t) + j[\check{m}_0(t) * h(t)]\}$



(171)

10.4 Modulation de fréquence

10.4.1 Cas général : signal quelconque

La modulation de fréquence consiste à opérer une translation du spectre de fréquence du signal modulant en transformant les variations de ce **signal modulant m(t)** en **variations de la fréquence instantanée** $\mathbf{f}_{p_i}(\mathbf{t})$ d'une porteuse de fréquence f_p. Cette modulation est, comme la modulation de phase et à l'inverse des modulations d'amplitude, une **modulation non-linéaire**.

- **Expression du signal modulé en fréquence**

On commence par exprimer la fréquence instantanée $f_{p_i}(t)$.

$$\boxed{f_{p_i}(t) = f_p + \Delta_f(t) = f_p + k_f\, m(t)} \tag{172}$$

où $\Delta_f(t) = \mathbf{k_f\, m(t)}$ est la **déviation instantanée de fréquence** et k_f (en Hz/Volt) un facteur dépendant du modulateur .

L'expression de la **phase instantanée** est alors donnée par :

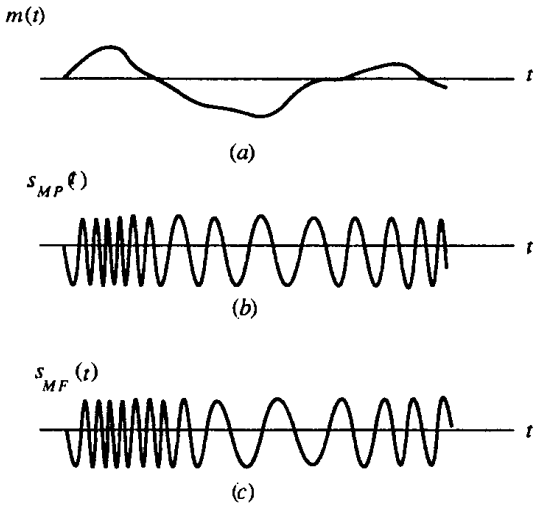
$$\boxed{\theta_\iota(t) = 2\Pi \int f_{p_i}(t)dt = 2\Pi\,[\,f_p t + k_f \int_0^t m(t)dt\,]} \tag{173}$$

où elle **dépend linéairement de l'intégrale du signal primaire**.

Ceci donne pour l'expression du **signal modulé complet** :

$$\boxed{s_{MF}(t) = A_p cos(\theta_\iota(t)) = A_p\, cos\ [2\Pi(f_p t + k_f \int_0^t m(t)dt)]} \tag{174}$$

Contrairement aux modulations AM et à ses dérivées, le signal modulé en fréquence n'est donc plus une fonction linéaire du signal modulant m(t), mais une **fonction trigonométrique du signal modulant**.



Exemple de signaux modulés en phase (b) et en fréquence (c), par un message m(t) (a) (175)

10.4.2 Modulation de fréquence avec signal modulant sinusoïdal

Si le signal modulant est **sinusoïdal** :

$$\boxed{m(t) = A_m cos 2\Pi f_m t} \tag{176}$$

l'expression de la **fréquence instantanée** devient, d'après [172] :

$$\boxed{f_i = f_p + k_f\, A_m cos(2\Pi f_m t) = f_p + \Delta_f\, cos(2\Pi f_m t)} \tag{177}$$

où $\boxed{\Delta_f = k_f A_m}$ est la **déviation (ou excursion) maximale de fréquence** ($\pm\,\Delta_f$). La fréquence instantanée **varie de manière sinusoïdale** avec Δ_f.

La **phase instantanée** s'écrit alors :

$$\boxed{\theta_\iota(t) = 2\Pi f_p t + \frac{k_f\, A_m}{f_m} sin 2\Pi f_m t} \tag{178}$$

- **Indice de modulation**

Comme le signal modulant est sinusoïdal, et de façon identique à la modulation AM, on peut définir un **indice de modulation** β :

$$\boxed{\beta = \frac{\Delta_f}{f_m} = \frac{k_f\, A_m}{f_m} = \frac{(f - f_p)_{max}}{f_m}} \tag{179}$$

Definition 2 *L'indice de modulation est le rapport de l'excursion de la fréquence instantanée du signal MF à la fréquence du signal modulant.*

L'indice de modulation est un paramètre déterminant dans la caractérisation des propriétés de la transmission MF.

- Expression du signal modulé en fréquence par un signal sinusoïdal .

$$\boxed{s(t) = A_p\, cos\ (2\Pi f_p t + \beta sin 2\Pi f_m t)} \tag{180}$$

- Expression du spectre du signal modulé en fréquence par une sinusoïde

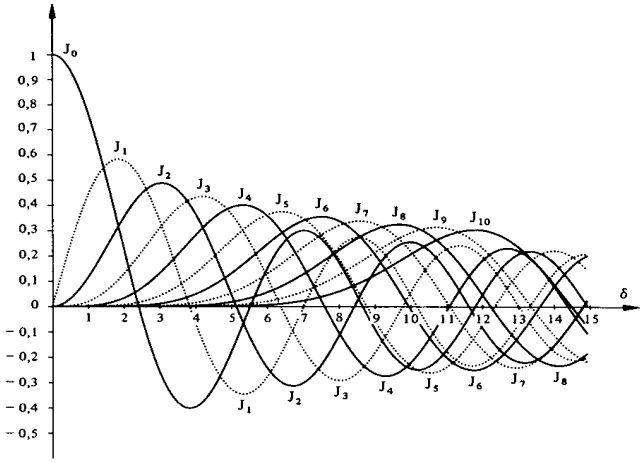
On peut montrer (voir par exemple D.Ventre Annexe A.3.1) que le signal MF modulé par une sinusoïde peut s'écrire :

$$s(t) = A_p \sum J_n(\beta) cos\ 2\Pi(f_p + n f_m)t \tag{181}$$

où les $J_n(\beta)$ sont les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre n (voir fig [183]).
L'expression de sa transformée de Fourier s'écrit :

$$S(f) = \frac{A_p}{2} \sum J_n(\beta)[\delta(f - f_0 - n f_m) + \delta(f + f_0 + n f_m)] \tag{182}$$

qui représente un spectre de raies distantes de f_m et d'amplitude $J_n(\beta)$.



Fonctions de Bessel de première espèce pour $n > 0$. (183)

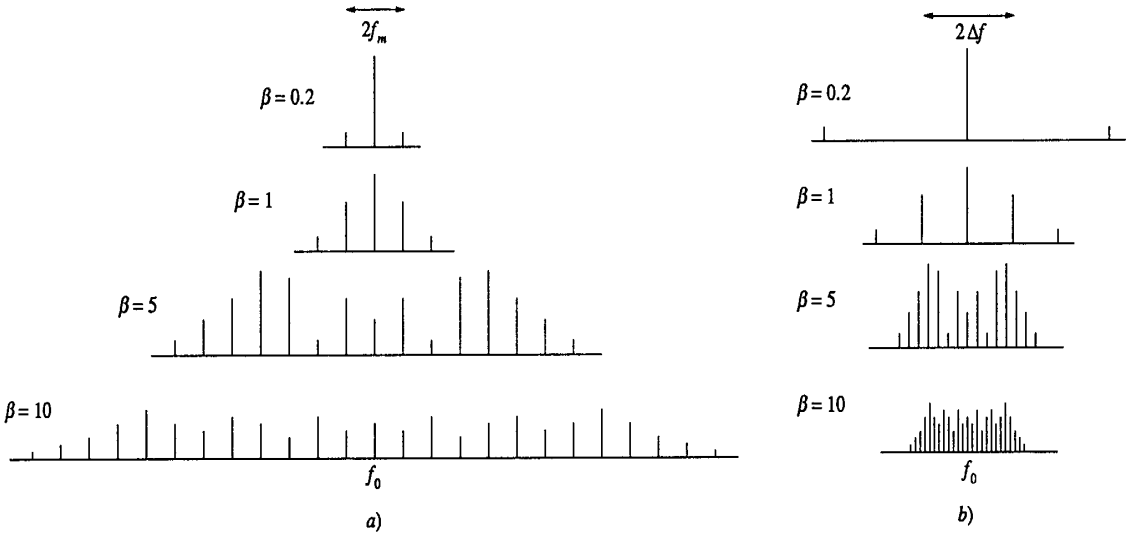
- **Encombrement en fréquence** disponible lorsque le signal modulant est sinusoïdal (**Règle empirique de Carson**) :

$$\boxed{B_u = 2(\Delta_f + f_m) = 2 f_m(\beta + 1)} \tag{184}$$

Cet encombrement en fréquence :
- détermine la bande utile (80% de l'énergie)
- dépend de l'indice de modulation :

a) Si $\beta \ll 1$, donc $\Delta_f \ll f_m$, la modulation est dite à **faible niveau ou à BANDE ÉTROITE**, le spectre se réduit à la porteuse avec 2 raies latérales, et B (largeur de bande) tend vers $2f_m$.

b) Si $\beta \gg 1$, donc $\Delta_f \gg f_m$, la modulation est à **niveau élevé ou à LARGE BANDE**, le spectre comporte un grand nombre de raies (environ 2β), et B tend vers $2\Delta_f$.



(185)

Spectre du signal modulé en fréquence par une sinusoïde de fréquence f_m
pour différentes valeurs de l'indice de modulation
a) $f_m$constant, Δ_f variable b) $f_m$variable, Δ_f constant

10.4.3 Avantages de la modulation de fréquence

C'est une modulation à **enveloppe constante** qui rend la transmission particulièrement **robuste aux phénomènes d'évanouissement (fading)**, contrairement à la modulation d'amplitude.

L'enveloppe, donc l'amplitude A du signal modulé, est constante ce qui signifie que la **puissance est constante** et similaire à celle d'un signal d'amplitude A.

$$\boxed{P_{(MF)} = \frac{A_p^2}{2}} \tag{186}$$

Cette caractéristique facilite l'amplification du signal et en particulier permet d'obtenir un meilleur rendement dans un étage amplificateur (qui peut alors fonctionner près de la saturation). L'enveloppe constante donne aussi à cette modulation une bonne **résistance aux non-linéarités**, à la fois de l'amplification et du **medium de transmission.** Dans tous les cas de variation de l'amplitude du signal modulé, l'information intrinsèque du signal modulant est conservée.

10.5 Modulations discrètes

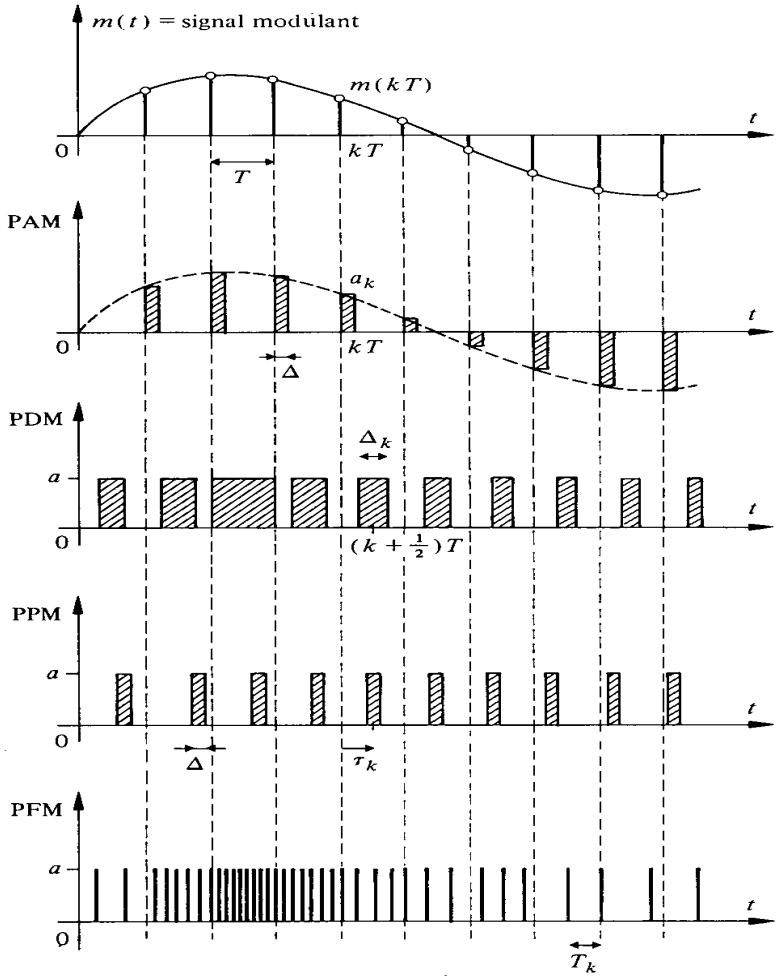
Par modulations discrètes, et comme les auteurs ne s'accordent pas toujours sur les termes, nous entendrons ici toute modulation présentant une **nature numérique soit de la porteuse**, **soit du signal modulant**. Le premier type permet de transmettre une information analogique sans transposition de fréquence. Le deuxième type, **utilisé très intensivement dans le monde numérique** actuel, permet de transmettre une information numérique par modulation discrète d'une porteuse sinusoïdale. C'est ce type de modulation que l'on retrouve dans les transmissions de TV numérique, les téléphones portables (GSM, DCS), dans les modems de transmission de données informatiques etc.

10.5.1 Modulations par impulsions codées

La modulation d'impulsions permet de transmettre une **information analogique** sous la forme d'une série d'impulsions codant cette information d'où son nom de **modulation par impulsions codées (MIC ou PCM : pulse coded modulation)**. Cette forme de modulation est simplement une variante des techniques d'échantillonnage. Voici les quatre types de modulation MIC principales :

- Modulation d'impulsion en amplitude (PAM, pulse amplitude modulation)
- Modulation d'impulsion en durée (PWM ou PDM, pulse width ou duration modulation)
- Modulation d'impulsion en position (PPM, pulse position modulation)
- Modulation d'impulsion en fréquence (PFM, pulse frequency modulation)

Comme pour les modulations angulaires FM et PM, elles permettent un **accroissement de l'immunité au bruit** au prix d'un **élargissement de la bande occupée**. En revanche elles permettent la **transmission simultanée** de plusieurs messages par **multiplexage temporel**. Ces modulations sont représentées dans la figure [187].



(187)

Modulations par impulsions codées

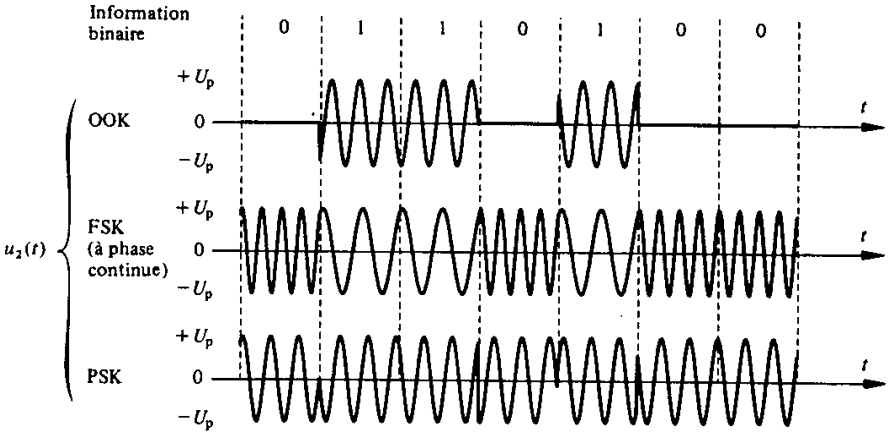
10.5.2 Modulations discrètes d'une porteuse sinusoïdale

Lorsque le signal modulant est un **signal numérique binaire**, et la **porteuse sinusoïdale** (et non en série d'impulsions comme pour le MIC), cette porteuse ne se présentera plus que sous **m=2 états différents** d'amplitude, de fréquence, de phase ou de présence par exemple, qui vont **coder les 2 valeurs discrètes du signal modulé.** Dans le cas d'un signal binaire, les **deux états de la porteuse correspondent donc aux deux états logiques 0 et 1**. Le nombre d'états discrets m du signal n'est pas toujours égal à 2, mais peut être supérieur à 2. On parle alors de **moments** du signal et non d'états. La porteuse prend donc m états que l'on nomme eux **symboles.** Nous prendrons m=2 pour simplifier et illustrer les 3 grands types de modulations discrètes.

- **ASK (amplitude shift keying)** et **OOK (on-off shift keying)**.

Les états logiques 0 et 1 sont simplement codés par deux amplitudes différentes de la porteuse et, dans le cas particulier de la modulation OOK, par la présence ou non de la porteuse.

- FSK(frequency shift keying)
Les états 0 et 1 logiques sont codés par deux fréquences différentes de la porteuse.
- PSK (phase shift keying)
Les états 0 et 1 logiques sont codés par deux phases différentes de la porteuse.



(188)

Modulations discrètes à porteuse sinusoïdale

11 Transformée de Laplace

L'étude d'un système linéaire **en dehors d'un régime permanent** où il est soumis à des formes d'onde sinusoïdales nécessite d'introduire un nouvel outil. En effet dans les phases de **régime transitoire**, le système est soumis à des formes d'onde **non décomposables en série de Fourier**, comme par exemple l'échelon ou Heaviside. La résolution d'un tel système peut se faire par les techniques classiques d'équations différentielles linéaires (à coefficients constants) et s'avère en général longue. Une autre technique de **calcul opérationnel** (symbolique) fait appel à la **transformée de Laplace**.

11.1 Définition

A toute fonction du temps f(t), nulle pour $t < 0$, donc représentant un **signal causal,** on fait correspondre une fonction L[f(t)] de variable complexe p, définie par :

$$\boxed{f(t) \qquad \supset \qquad L[f(t] = L(p)\, ou\, F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt} \tag{189}$$

La notation $\supset$ servant de correspondance domaine temporel-domaine spectral, est particulière à la transformée de Laplace et n'est pas systématique.

- Remarque

La transformée de Laplace se déduit donc, pour des signaux causaux, de la transformée de Fourier en effectuant la transformation suivante :

$$\boxed{p = s = \sigma + j\omega} \tag{190}$$

où p est appelée **fréquence complexe.**

L' hypothèse de **causalité**, plus le changement de variable de réelle (fréquence) à **complexe**, forment les deux conditions d'existence de la transformée de Laplace par rapport à la transformée de Fourier.

Dans la pratique, on utilisera plus couramment le changement de variable $\boxed{p = j\omega}$ au lieu de $\sigma + j\omega$. Il faut néanmoins retenir que le terme σ a été créé pour que la transformée de Fourier, dont est issue la transformée de Laplace, admette une valeur finie. En effet, lorsque l'intégrale de Fourier, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, exp(-j2\pi ft)dt$, n'est pas convergente, il suffit de multiplier $f(t)$ par $exp(-\sigma t)$ pour rendre l'intégrale convergente. Le terme σ est appelé **rayon de convergence** de l'intégrale.

11.2 Propriétés

Les propriétés de la transformée de Laplace se déduisent directement de celles de la transformée de Fourier pour un signal causal. On notera plus particulièrement les théorèmes de la valeur initiale et finale, propres à la T.L..

- Somme de fonctions

$$\boxed{f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad \Longrightarrow \quad F(p) = F_1(p) + F_2(p)} \tag{191}$$

- Dérivation

La dérivation d'une fonction f(t) supposée nulle en t = 0 équivaut à la multiplication par p de la fonction image

$$\boxed{F\left[f'(t)\right] = p.F(p) - f(0^+)} \tag{192}$$

- Intégration

L'intégration d'une fonction f(t) supposée nulle en t = 0 équivaut à la division par p de la fonction image

$$\boxed{F\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}} \tag{193}$$

- Théorème des valeurs finale et initiale

Il précise de le comportement de f(t) pour t tendant vers 0 et pour t tendant vers ∞.

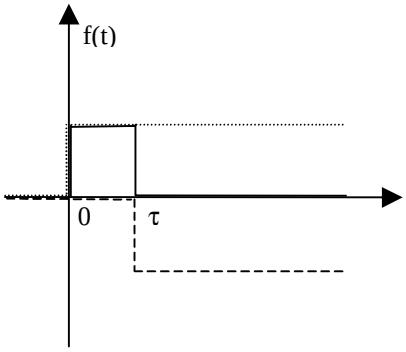
$$\boxed{\begin{array}{c} f(0^+) = \lim\limits_{p \to \infty} p.F(p) \\ \lim\limits_{t -> +\infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} p.F(p) \end{array}} \tag{194}$$

- Théorème du retard

$$\boxed{f(t-\tau) \supset F(p).e^{-pt}} \tag{195}$$

Application : transformée d'une fonction rectangle

Par sommation de deux échelons dont l'un est négatif et retardé de τ, on peut trouver la **transformée d'une fonction rectangle** :

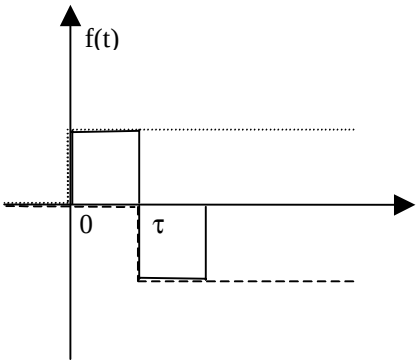


(196)

$$\boxed{F_{rect_\tau}(p) = \frac{(1-e^{-p\tau})}{p}} \tag{197}$$

Une **onde** rectangulaire peut être construite en retardant et inversant le motif rectangle ci-dessus. Sa transformée se calcule donc comme suit :

$F(p) = \frac{(1-e^{-p\tau})}{p} - \frac{(1-e^{-p\tau})}{p}e^{-p\tau} = \frac{(1-e^{-p\tau})^2}{p}$



(198)

- Transformée d'une fonction périodique

D'après le théorème du retard, on peut écrire :
$F_T(p) = F(p).[1 + e^{-pt} + e^{-2pt} + e^{-3pt} + ...]$. Pour $T > 0$, donc $e^{-pt} < 1$, cette série géométrique a une somme finie, donc on peut écrire la T.L. d'une fonction périodique :

$$\boxed{F_T(p) = F(p).\frac{1}{1 - e^{-pT}}} \tag{199}$$

11.3 Technique de calcul

Connaitre la réponse temporelle d'un circuit par la T.L. nécessite :

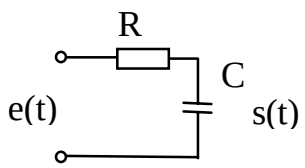
1. De calculer le transfert de Laplace du circuit, c'est à dire H(p)
2. De déterminer la T.L. de l'entrée, par application de la définition, ou utilisation des tables. Obtenir la transformée du signal d'entrée nécessite souvent de décomposer ce signal en éléments dont on sait calculer la transformée (en multipliant, sommant , dérivant, intégrant etc.)
3. D'effectuer le produit s(p) = H(p).e(p) et de calculer la T.L. inverse (l'original) de s(p) par les tables après avoir identifié s(p) à des transformées connues. Cette opération n'est pas toujours immédiate et passe quelquefois par une décomposition en fractions rationnelles (voir formulaire).

- Transformée du signal d'entrée

- Détermination de l'original

11.4 Exemples

11.4.1 Réponse d'un filtre RC passe-bas à un échelon de tension



(200)

1. Transfert du circuit
$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{\frac{1}{Cp}}{R+\frac{1}{Cp}} = \frac{1}{1+RCp}$.
En posant $RC = \tau = \frac{2\Pi}{\omega_0}$ on obtient : $H(p) = \frac{1}{1+\tau p} = \frac{\omega_0}{p+\omega_0}$
La correspondance en régime sinusoïdal, donc pour $p = j\omega$, s'écrit : $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

2. Transformée de l'entrée

Si l'entrée est un échelon $E.H(t)$ en 0, sa transformée est $\frac{E}{p}$

3. Expression de la réponse temporelle s(t)
$s(p) = H(p) \times E(p) = \frac{E}{p}.\frac{1}{1+\tau p} = \frac{E}{p}.\frac{1/\tau}{1/\tau+p}$
de quoi nous déduisons en regardant la table : $s(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

11.4.2 Réponse d'un filtre passe-bas à une impulsion rectangulaire

Le signal d'entrée du circuit RC passe-bas est maintenant une impulsion carrée de largeur θ et d'amplitude E, dont la transformée, $F_{rect_E\theta}(p) = E\frac{(1-e^{-p\theta})}{p}$, a été calculée plus haut (voir Th. du retard). La sortie est donnée par le produit

$$s(p) = H(p)\,[\text{"}fonction\ de\ transfert\ en\ Laplace\text{"}] \times F_{rect_E\theta}(p) \tag{201}$$

donc

$$s(p) = \frac{1}{1+\tau p}.E\frac{(1-e^{-p\theta})}{p} \tag{202}$$

$$= \frac{1}{p(1+\tau p)}.E(1-e^{-p\theta}) \tag{203}$$

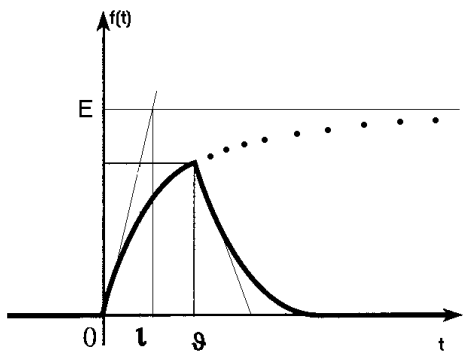
où l'on fait appel à une décomposition simple de fraction fractionnelle en [203], par identification à $[\frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p}]$, donc

$$s(p) = (\frac{1}{p} - \frac{1}{1+\tau p}).E\,(1-e^{-p\theta}) \tag{204}$$

$$= E(\frac{1}{p} - \frac{1}{1+\tau p}) - E.e^{-p\theta}(\frac{1}{p} - \frac{1}{1+\tau p}) \tag{205}$$

on obtient ainsi la réponse temporelle :

$$s(t) = \underbrace{E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}).H(t)}_{\text{commence à t=0}} - \underbrace{E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}).H(t-\theta)}_{\text{commence à t=}\theta} \tag{206}$$



(207)

11.5 Table de transformées de Laplace

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$		$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$\delta(t)$	1		$e^{-at}sin(bt)$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
$H(t)$	$\frac{1}{p}$		$tcos(bt)$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$		$tsin(bt)$	$\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$		$f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$		$1-e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$			
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$			
$\frac{t^2}{2}e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^3}$			
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$			
$cos(bt)$	$\frac{p}{p^2+b^2}$			
$sin(bt)$	$\frac{b}{p^2+b^2}$			
$e^{-at}cos(bt)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$			

(208)

12 Transformée de Fourier discrète

$$TFD\left\{x(n)\right\} = X(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{\,j\,\frac{2\Pi}{N}\,n\,\nu} \tag{209}$$

13 Transformée en Z. Introduction au filtrage numérique

13.1 Transformée en Z

Definition 3 *La transformée en Z (T. Z.) d'une série d'échantillons $V(n)$ est définie par :*

$$Z_V(z) = V(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{V(n)}{z^n} \tag{210}$$

avec $z = e^{j\omega\theta} = e^{p\theta}$, et θ la période d'échantillonnage.

- Signal retardé d'un échantillon

$$V(z) -> \frac{1}{z}.V(z) \tag{211}$$

Cette propriété montre, dans la définition de la transformée en Z plus-haut, que le terme du dénominateur en z^n exprime le retard de l'échantillon de rang n, V(n), d'une durée égale à n fois la durée d'un échantillon.. Cette transformée est donc particulièrement adaptée à la modélisation de signaux numérisés.

- Signal retardé de k échantillons

$$V(z) -> \frac{1}{z^k}.V(z) \tag{212}$$

13.2 Dictionnaire des transformées en Z

- Impulsion numérique ($v_n \neq 0$, $v_0 = 1$) :

$$V(z) = V_0/Z_0 = 1 \tag{213}$$

- Suite géométrique ($V(n+1) = a \times V(n)$) :

$$V(z) = V_0/(1 - \frac{a}{z}) \tag{214}$$

- Signal $V(n) = cosn\phi$:

$$V(z) = \frac{1 - cos\frac{\varphi}{z}}{1 - 2cos\frac{\varphi}{z} + \frac{1}{z^2}} \tag{215}$$

13.3 Fonction de transfert d'un fitre numérique

Fonction de transfert générale d'un filtre numérique IIR (le FIR n'a pas le dénominateur)

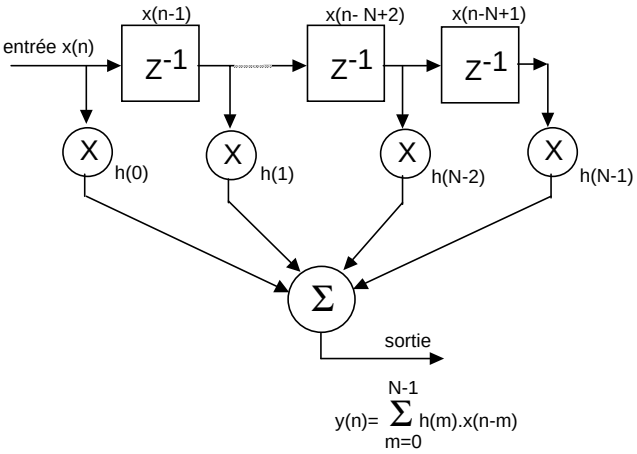
L'expression de la fonction de transfert harmonique d'un filtre numérique est la suivante :

$$H(j\omega) = \frac{R}{A} = \frac{r_n}{a_n} = \frac{\sum_{k=0}^{K} A_k \; e^{-jk\omega\theta}}{(1 - \sum_{m=1}^{M} B_m e^{-jm\omega\theta})} \tag{216}$$

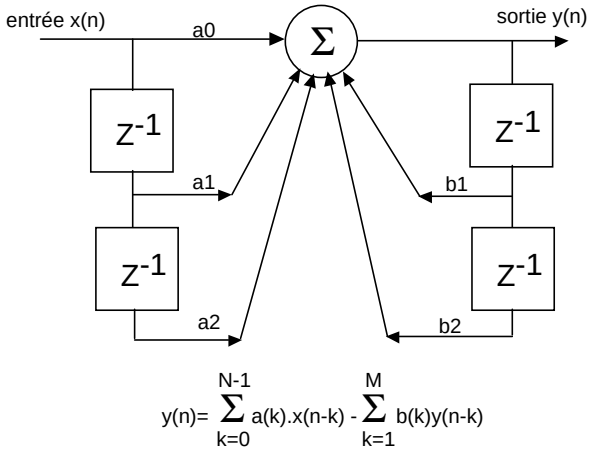
La fonction de transfert en z s'exprime :

$$H(z) = \frac{R(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{K} \frac{A_k}{z^k}}{1 - \sum_{m=1}^{M} \frac{B_m}{z^m}} \tag{217}$$

Représentation des filtres numériques



Filtre FIR d'ordre N



Filtre IIR d'ordre 2

(218)

13.4 Transformation bilinéaire

- La transformation bilinéaire est utilisée pour le passage d'un filtre analogique à un filtre numérique RII. On appelle θ la période d'échantillonnage.

On passe alors de $H(p)$, ou $H(j\omega)$, à $H(z)$ en effectuant la transformation suivante :

$$\boxed{p\,(ou\,j\omega) \longleftrightarrow \frac{2}{\theta} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{+1}}} \tag{219}$$

- La réponse en fréquence s'obtient en remplaçant dans la réponse analogique (équivaut à changer z en $e^{j\omega\theta}$ dans le transfert en Z) :

$$\boxed{\omega_A <-> \frac{2}{\theta}.\, tg(\frac{\theta}{2}\omega_N\ )} \tag{220}$$

14 Formulaire de Math

14.1 Trigonométrie

$$\cos^2 + \sin^2 = 1 \tag{221}$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \tag{222}$$

$$\begin{aligned} \cos a + b &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos a - b &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin a + b &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin a - b &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{aligned} \tag{223}$$

14.2 Nombres complexes

$$[\rho, \theta] = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{224}$$

$$\text{Formule de Moivre : } e^{im\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^m = (\cos m\theta + i\sin m\theta) \tag{225}$$

$$\text{Formule d'Euler} \quad : \ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i} \tag{226}$$

14.3 Equations différentielles

14.4 Dérivation

14.5 Intégration

par parties/chgt de variable/fractions rationnelles

14.6 Développements limités

Formule de Taylor (Mac-Laurin: on pose a=0 et a+h=x)

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n \tag{227}$$

ou encore (en posant $a = x_0$ et $h = x - x_0$) :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f'(x_0)}{1!} + ... + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n \tag{228}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Développements limités valables } \forall x \in \Re \\
e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \\
a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + ... + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + ... \\
\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \\
\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \\
\text{Développements limités valables } \forall \, |x| < 1 \\
\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + ... \\
\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + ... \\
Arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...
\end{array}} \tag{229}$$

14.7 Convergence des séries

14.8 Décomposition des fractions rationnelles

On cherche à décomposer une fraction rationnelle, à coefficients réels, en éléments simples, c'est-à-dire en une somme de fractions dont le dénominateur est simplifié en un seul pôle d'ordre n. Lorsqu'on connaît les pôles réels et complexes et leurs ordres de multiplicité α, β, μ, etc... on peut écrire la fraction sous la forme :

$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{\underbrace{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma}_{\text{pôles réels}} ... \underbrace{(x^2+px+q)^\mu (x^2+rx+s)^\nu}_{\text{pôles complexes}} ...}} \tag{230}$$

Deux cas :

1) le degré de f(x) est inférieur à celui de g(x)

2) le degré de f(x) est supérieur ou égal à celui de g(x)

Cas 1) On décompose la fraction en éléments simples de première et deuxième espèce (à pôles complexes)

Eléments simples de première espèce $\left\{ [\frac{A0}{(x-a)^\alpha} + \frac{A1}{(x-a)^{\alpha-1}} + ...] + [\frac{B0}{(x-b)^\beta} + \frac{B1}{(x-b)^{\beta-1}} + ...] + ... \right.$

Eléments simples de deuxième espèce $\left\{ [\frac{M_0 x + N_0}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + ...] \right.$

Puis on réduit au même dénominateur les fractions du second membre et on identifie terme à terme pour trouver les coefficients $A_0, A_{1,}..., B_{0,}B_{1,}...$

Cas 2) Le degré de f(x) est supérieur ou égal à celui de g(x). On divise f(x) par g(x) suivant les puissances croissantes.

$$f(x) = g(x)E(x) + R(x) \tag{231}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{g(x)} \tag{232}$$

et l'on résoud $\frac{R(x)}{g(x)}$ comme au cas 1)

14.9 Probabilités

- Variable aléatoire
- Fonction de répartition, densité de probabilité

  (On considère un signal déterministe comme une variable aléatoire équiprobable. Sur une période, sa densité de probabilité est constante et égale à 1/T, que le signal soit discret ou continu)
- Moment d'ordre n

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n.f(x)dx \tag{233}$$

pour un signal déterministe, on remplacera x par f(t) et f(x) par 1/T puisque la variable est équiprobable.

- Moment d'ordre 1 ou Moyenne, ou Espérance.

$$E(X) = \int x.f(x)dx \tag{234}$$

- Variance
- Ecart-type
- Loi Gaussienne

15 Bibliographie

- Bellanger M. Traitement numérique du signal. Cours et exercices résolus.CNET (**)
- Cottet F. Traitement des signaux et acquisition de données. Cours et exercices résolus. Dunod (**)
- De Coulon F. Théorie et traitement des signaux. PPUR. (**)
- Deluzurieux / Rami . Cours d'electronique analogique tome2 : analyse fréquentielle des signaux et systèmes, analyse de Laplace. Eyrolles. Orienté électronique. Exercices non corrigés.
- Fontolliet P.G. Télécommunications.PPUR (**)
- Guibart D. Cours de Télécommunications. ENST
- Hervé . Modulations numériques. Ellipses.
- Labarrere, Krief, Gimonet. Le filtrage et ses applications. Ed. Cepadues (coll. ENSAE).
- Lefèvre P. Théorie du signal .ESE.
- Matlab (signal toolbox et exemples de Tt signal sur le web)
- Max J. Méthodes et techniques de traitement du signal. (**) Tome 1 : principes généraux et méthodes classiques. Masson. (Théorie de l'information - Etudes théoriques - Traitement du signal -Transmission de l'information - Propagation des ondes - Compatibilité électromagnétique)
- Metzer G., Vabre J.P. Electronique des impulsions. Masson (**)
- Nayman (DEA Web)
- Neffati T. Traitement analogique du signal. Ellipses. (orienté électronique). Bon cours. Pas d'exercices. (*)
- Pelat (Web)
- Reinhardt Elements de mathématiques du signal (2 tomes) (*)
- Reynaud R. Polycopié de traitement du signal. IUT Orsay.
- Spiegel R. Murray. Analyse de Fourier (Schaum). Cours et problèmes.
- Smith. Traitement numérique du signal. DSP. (web)
- Thomas Y. Signaux et systèmes linéaires. Masson. (*)
- Thuiller/Belloc Mathématiques pour l'Electronique. Masson. (**)
- Vaterkowski (Ens2m Web : voir sa biblio)
- Ventre D. Modulations analogiques. Ellipses.
- Vigliano (Web; cours TS DESS techniques de l'espace)

Autres ouvrages
- Ingle /Proakis (Digital signal processing using Matlab)
- Lacoume J.L. Théorie du signal PUF collection que sais-je
- Fraisse P., Protière R., Marty-Dessus D. Transmission de l'information Ed. Ellipse 1999
- Auger F. Introduction à la théorie du signal et de l'information" cours et exercices Ed. Technip 1999
- Pelat A. Signaux et circuits. Editions Ellipses 1989
- Picinbono B. Théorie des signaux et des systèmes. Ed. Dunod Université 1989
- Picinbono B. Eléments de théorie du signal. Ed. Dunod Université 1977

- Roubine E. Introduction à la théorie de la communication. Ed. Masson et Cie 1970
- WilliamsonLabs (Web) - Modulations-